

Dendrometría

universidad
autónoma
chapingo

*carlos francisco romahn de la vega
hugo ramírez maldonado*

**División de
Ciencias
Forestales**

2010



Tabla de Contenido.

Tabla de Contenido.	ii
Tabla de Figuras.	x
Tabla de Tablas.	xv
1 Generalidades.	1
1.1 Dasometría o Medición Forestal.....	1
1.2 Bosquejo Histórico.....	2
1.3 División de la Dasometría.....	2
1.4 Medición Directa, Cálculo y Estimación.....	3
1.5 Nociones Matemáticas.....	3
1.5.1 Funciones Naturales de Ángulos.....	3
1.5.2 Teorema de Pitágoras.....	5
1.5.3 Distancias Auxiliares.....	6
1.5.3.1 Con respecto al árbol.....	6
1.5.3.2 Con respecto al terreno.....	7
1.5.4 Métodos para Medir Distancias.....	9
1.5.4.1 Directos.....	9
1.5.4.2 Indirectos.....	9
1.6 Unidades de Medición.....	9
1.6.1 Unidades de Longitud.....	10
1.6.2 Unidades de Superficie.....	10
1.6.3 Unidades de Volumen.....	10
1.7 Equivalencias y Conversión de Unidades.....	10
1.7.1 Equivalencias.....	11
1.7.1.1 Unidades de longitud.....	11
1.7.1.2 Unidades de superficie.....	11
1.7.1.3 Unidades de volumen.....	11
1.7.2 Conversión.....	11
1.7.2.1 Unidades de longitud.....	12
1.7.2.2 Unidades de superficie.....	12
1.7.2.3 Unidades de volumen.....	12
2 Medición de Árboles.	13
2.1 Medición de Alturas.....	13

2.1.1	<i>Métodos Geométricos</i>	15
2.1.1.1	<i>Pie del árbol accesible</i>	15
2.1.1.1.1	Visual horizontal del observador entre la punta y el pie del árbol.....	15
2.1.1.1.2	Visual horizontal del observador por arriba de la punta del árbol.....	17
2.1.1.1.3	Visual horizontal del observador por abajo de la base del árbol.....	18
2.1.1.1.4	Medición de alturas sin determinación de distancia horizontal.....	19
2.1.1.2	<i>Pie del árbol inaccesible</i>	20
2.1.2	<i>Instrumentos Basados en Principios Geométricos</i>	22
2.1.2.1	<i>Cruz del hachero</i>	22
2.1.2.2	<i>Escuadra de brazos iguales</i>	24
2.1.2.3	<i>Hipsómetro de Merrit</i>	25
2.1.2.4	<i>Bastón hipsométrico</i>	27
2.1.2.5	<i>Hipsómetro de Christen</i>	28
2.1.3	<i>Métodos Trigonométricos</i>	30
2.1.3.1	<i>Pie del árbol accesible</i>	30
2.1.3.1.1	Visual horizontal del observador entre la punta y la base del árbol.....	30
2.1.3.1.2	Visual horizontal del observador arriba de la punta del árbol.....	32
2.1.3.1.3	Visual horizontal del observador abajo de la base del árbol.....	33
2.1.3.1.4	Medición de alturas sin determinación de distancia horizontal.....	34
2.1.3.2	<i>Pie del árbol inaccesible</i>	36
2.1.4	<i>Instrumentos para Medir Ángulos Verticales</i>	38
2.1.4.1	<i>Fijación de la horizontal mediante un nivel de burbuja</i>	38
2.1.4.2	<i>Fijación de la horizontal utilizando una plomada</i>	39
2.1.5	<i>Instrumentos para Medir Alturas Basados en Principios Trigonométricos</i>	40
2.1.5.1	<i>Plancheta hipsométrica</i>	40
2.1.5.2	<i>Clisímetro o nivel de Abney</i>	42
2.1.5.3	<i>Clinómetro Suunto</i>	44
2.1.5.4	<i>Hipsómetro Blume-Leiss</i>	46
2.1.5.5	<i>Pistola Haga</i>	48
2.1.6	<i>Observaciones Prácticas</i>	49
2.2	<i>Medición de Diámetros</i>	54

Tabla de Contenido.

2.2.1	<i>Diámetro Normal.</i>	56
2.2.2	<i>Aparatos para la Medición de Diámetros Normales.</i>	60
2.2.2.1	<i>Forcípula.</i>	60
2.2.2.2	<i>Cinta diamétrica.</i>	63
2.2.2.3	<i>Regla Biltmore.</i>	64
2.2.2.4	<i>El microdendrómetro.</i>	68
2.2.2.5	<i>Otros instrumentos para medir diámetros.</i>	68
2.2.3	<i>Diámetros Superiores del Fuste.</i>	69
2.3	<i>Medición de Secciones.</i>	70
2.3.1	<i>Errores en la Determinación del Área de Secciones Transversales Elípticas.</i>	72
2.3.2	<i>Otras Áreas de Importancia en Dasonomía.</i>	79
2.3.3	<i>Otros Procedimientos para la Determinación de Áreas.</i>	80
2.4	<i>Medición de la Corteza.</i>	80
3	<i>Cubicación de Árboles y de Productos Primarios.</i>	83
3.1	<i>Tipos Dendrométricos.</i>	83
3.1.1	<i>Cilindro.</i>	88
3.1.2	<i>Paraboloide Apolónico.</i>	88
3.1.3	<i>Cono.</i>	91
3.1.4	<i>Neiloide.</i>	94
3.2	<i>Cubicación de Fustes y Trozas.</i>	97
3.2.1	<i>Fórmula de Smalian.</i>	98
3.2.2	<i>Fórmula de Huber.</i>	99
3.2.3	<i>Fórmula de Huber Modificada.</i>	100
3.2.4	<i>Fórmula de Newton.</i>	101
3.2.5	<i>Fórmula de Simpson.</i>	104
3.2.6	<i>Fórmula de Heyer.</i>	105
3.2.7	<i>Fórmula de Kuntze.</i>	106
3.3	<i>Resumen de Fórmulas de Cubicación</i>	108
3.4	<i>Precisión en la Cubicación.</i>	110
3.4.1	<i>Determinación de la Sección Media de los Diferentes Truncados en Función de las Secciones Extremas.</i>	111
3.4.1.1	<i>En el paraboloide apolónico.</i>	112
3.4.1.2	<i>En el cono.</i>	113
3.4.1.3	<i>En el neiloide.</i>	114
3.4.2	<i>Errores al Determinar el Volumen de Truncados de los Diferentes Tipos Dendrométricos con las Fórmulas Operativas.</i>	115
3.4.2.1	<i>Errores al determinar el volumen de un truncado de paraboloide apolónico.</i>	116

3.4.2.1.1	Volumen del truncado de paraboloides apolónico vs. Smalian.	116
3.4.2.1.2	Volumen del truncado de paraboloides apolónico vs. Huber.	117
3.4.2.1.3	Volumen del truncado de paraboloides apolónico vs. Huber modificada.	117
3.4.2.1.4	Volumen del truncado de paraboloides apolónico vs. Newton.	118
3.4.2.2	<i>Errores al determinar el volumen de un truncado de cono.</i>	<i>119</i>
3.4.2.2.1	Volumen del truncado de cono vs. Smalian.	119
3.4.2.2.2	Volumen del truncado de cono vs. Huber.	120
3.4.2.2.3	Volumen del truncado de cono vs. Huber modificada.	121
3.4.2.2.4	Volumen del truncado de cono vs. Newton.	122
3.4.2.3	<i>Errores al determinar el volumen de un truncado de neiloide.</i>	<i>123</i>
3.4.2.3.1	Volumen del truncado de neiloide vs. Smalian.	123
3.4.2.3.2	Volumen del truncado de neiloide vs. Huber.	124
3.4.2.3.3	Volumen del truncado de neiloide vs. Huber modificada.	125
3.4.2.3.4	Volumen del truncado de neiloide vs. Newton.	126
3.4.2.4	<i>Resumen de errores.</i>	<i>127</i>
3.5	<i>Coefficientes Mórficos.</i>	<i>129</i>
3.6	<i>Cubicación de Tocones, Puntas y Ramaje.</i>	<i>131</i>
3.7	<i>Cubicación de Corteza.</i>	<i>133</i>
3.7.1	<i>Por Diferencia de Volúmenes.</i>	<i>133</i>
3.7.2	<i>Ponderal.</i>	<i>133</i>
3.7.3	<i>Fórmulas Empíricas.</i>	<i>134</i>
3.8	<i>Cubicación de Árboles en Pie.</i>	<i>134</i>
4	<i>Cubicación de Leñas, Madera Aserrada y Otros Productos.</i>	<i>135</i>
4.1	<i>Cubicación de Leñas.</i>	<i>135</i>
4.1.1	<i>Métodos Básicos.</i>	<i>135</i>
4.1.1.1	<i>Inmersión.</i>	<i>136</i>
4.1.1.2	<i>Ponderal.</i>	<i>137</i>
4.1.1.3	<i>Determinación de áreas.</i>	<i>138</i>
4.1.2	<i>Métodos Aplicados.</i>	<i>140</i>

Tabla de Contenido.

4.1.2.1	Coeficientes de apilamiento.....	140
4.1.2.2	Tablas especiales.....	143
4.2	Estimación del Volumen de Madera Aserrada de Trocería.....	144
4.2.1	El Pie Tabla.....	144
4.2.2	Reglas Madereras de Estimación.....	145
4.2.2.1	Método de diagramas.....	146
4.2.2.1.1	Regla Scribner.....	148
4.2.2.2	Método de fórmulas matemáticas.....	149
4.2.2.2.1	Regla Internacional.....	152
4.2.2.2.2	Regla Doyle.....	158
4.2.2.2.3	Regla Doyle-Scriber.....	160
4.2.2.3	Método empírico.....	161
4.2.2.4	Descuentos por defectos.....	161
4.3	Cubicación de Productos Labrados o Aserrados.....	162
5	Tablas de Volúmenes.....	165
5.1	Introducción.....	165
5.1.1	Definición.....	165
5.1.2	Utilización.....	165
5.1.3	Tipos de Tablas de Volúmenes.....	166
5.2	Etapas en la Elaboración de una Tabla de Volúmenes.....	169
5.2.1	Definición de Objetivos.....	169
5.2.2	Elección de la Muestra.....	169
5.2.3	Mediciones de Campo.....	171
5.2.3.1	Mediciones sobre arbolado derribado.....	172
5.2.3.1.1	Mediciones para determinar el grupo o clase a que pertenece el árbol.....	172
5.2.3.1.2	Mediciones que se requieren para determinar las dimensiones de las trozas.....	175
5.2.3.1.3	Consideraciones generales en las mediciones para la determinación de clases de arbolado y dimensiones de las trozas.....	176
5.2.3.2	Medición de árboles en pie.....	177
5.2.3.3	Equipo y personal.....	177
5.2.3.4	Secuencia de trabajo.....	178
5.2.3.5	Registro de datos.....	178

5.3	<i>Construcción de Tablas de Volúmenes.....</i>	179
5.3.1	<i>Construcción de Tarifas.....</i>	179
5.3.1.1	<i>Revisión de conceptos.....</i>	179
5.3.1.1.1	<i>Datos bivariados.....</i>	179
5.3.1.1.2	<i>Regresión y correlación.....</i>	180
5.3.1.2	<i>Construcción de tarifas por mínimos cuadrados.....</i>	193
5.3.2	<i>Construcción de Tablas de Volúmenes.....</i>	199
5.3.2.1	<i>Elección de modelos.....</i>	200
5.3.2.2	<i>Prueba de modelos.....</i>	208
5.3.2.3	<i>Cálculo de los valores de la tabla de volúmenes.....</i>	209
5.3.2.4	<i>Utilización de índices de forma en la construcción de tablas de volúmenes.....</i>	210
5.3.2.4.1	<i>Empleo de coeficientes mórficos.....</i>	211
5.3.2.4.2	<i>Empleo de razones de forma.....</i>	214
5.3.2.4.3	<i>Empleo de razones de puntos de forma.....</i>	216
5.3.2.4.4	<i>Empleo de tablas basadas en la disminución gradual del diámetro a lo largo de la longitud del fuste.....</i>	216
6	<i>Inventarios Forestales.....</i>	218
6.1	<i>Definición de un Inventario Forestal.....</i>	218
6.2	<i>Objetivos de un Inventario Forestal.....</i>	219
6.2.1	<i>Definición de Objetivos.....</i>	219
6.2.2	<i>Prioridad de Objetivos.....</i>	220
6.2.3	<i>Especificaciones más Importantes para los Objetivos de un Inventario Forestal.....</i>	220
6.2.3.1	<i>Límites y cabida exacta del área por inventariar.....</i>	220
6.2.3.2	<i>División del área a inventariar.....</i>	220
6.2.3.3	<i>Naturaleza de la información requerida.....</i>	221
6.2.3.4	<i>Presentación de la información solicitada.....</i>	221
6.2.3.5	<i>Precisión de la información requerida.....</i>	221
6.3	<i>Importancia Relativa de los Elementos de un Inventario Forestal.....</i>	221
6.4	<i>Zonas Forestales.....</i>	225
6.5	<i>Régimen de la Propiedad Forestal.....</i>	226
6.6	<i>Cubicación y Otras Medidas de la Cantidad de Madera.....</i>	226
6.7	<i>Incremento.....</i>	227
6.8	<i>Periodicidad de los Inventarios.....</i>	227

Tabla de Contenido.

6.9	<i>Factores que Influyen en el Costo de los Inventarios.....</i>	229
6.9.1	<i>Tipo de Información Requerida.</i>	230
6.9.2	<i>Grado de Precisión.</i>	230
6.9.3	<i>Extensión de la Zona Objeto del Inventario.</i>	231
6.9.4	<i>Extensión Mínima de las Unidades de Superficie.</i>	231
6.10	<i>Principios de la Planificación de Inventarios Forestales.</i>	231
6.10.1	<i>Plan de un Inventario.</i>	232
6.10.2	<i>Esquema para Planes de Inventario Forestal.</i>	233
6.10.2.1	<i>Objetivos del inventario.</i>	233
6.10.2.2	<i>Información general.</i>	234
6.10.2.3	<i>Diseño de inventario.</i>	234
6.10.2.4	<i>Procedimiento de medición.</i>	234
6.10.2.5	<i>Procesamiento de la información.</i>	235
6.10.2.6	<i>Informe final.</i>	235
6.11	<i>Consideraciones Estadísticas en Inventarios Forestales.</i>	236
6.11.1	<i>Población.</i>	236
6.11.2	<i>Muestra.</i>	236
6.11.3	<i>Parámetro.</i>	236
6.11.4	<i>Estimadores.</i>	236
6.11.5	<i>Variables.</i>	237
6.11.6	<i>Muestreo.</i>	238
6.11.7	<i>Unidades de Muestreo.</i>	238
6.11.8	<i>Media.</i>	238
6.11.9	<i>Medidas de Dispersión.</i>	238
6.11.10	<i>Covarianza.</i>	240
6.11.11	<i>Coefficiente de Variación.</i>	241
6.12	<i>Muestreo en Inventarios Forestales.</i>	242
6.12.1	<i>Importancia del Muestreo.</i>	242
6.12.2	<i>Objetividad del Muestreo.</i>	242
6.12.3	<i>Errores en Muestreo Forestal.</i>	243
6.12.3.1	<i>Error estándar.</i>	243
6.12.3.2	<i>Factor de corrección para poblaciones finitas.</i>	243
6.12.3.3	<i>Error de muestreo.</i>	244
6.12.3.4	<i>Límites de confianza.</i>	246
6.12.4	<i>Intensidad de Muestreo.</i>	247
6.12.5	<i>Tamaño de Muestra.</i>	248

6.13	<i>Diseño de Muestreo.</i>	253
6.13.1	<i>Forma y Tamaño de las Unidades Muestrales (Sitios de Muestreo).</i>	254
6.13.1.1	<i>Sitios cuadrados.</i>	254
6.13.1.2	<i>Sitios circulares.</i>	255
6.13.1.3	<i>Sitios rectangulares.</i>	257
6.13.1.4	<i>Tamaño de los sitios.</i>	259
6.13.2	<i>Distribución de los Sitios de Muestreo.</i>	260
6.13.2.1	<i>Distribución no probabilística.</i>	260
6.13.2.2	<i>Distribución probabilística.</i>	270
7	<i>Anexos.</i>	280
	<i>Anexo 1. Tabla de cubicación de madera aserrada en pies tabla.</i>	280
	<i>Anexo 2. Regla Scribner Decimal C.</i>	282
	<i>Anexo 3. Regla Internacional.</i>	284
	<i>Anexo 4. Regla Doyle.</i>	286
	<i>Anexo 5. Regla Doyle-Scribner.</i>	288
	<i>Anexo 6. Comparación de reglas de estimación maderera.</i>	292

Tabla de Figuras.

<i>Figura 1. Triángulo rectángulo.....</i>	<i>4</i>
<i>Figura 2. Triángulo oblicuángulo.....</i>	<i>5</i>
<i>Figura 3. Lados de un triángulo rectángulo.....</i>	<i>5</i>
<i>Figura 4. Distancias auxiliares de un observador a un árbol (planta).</i>	<i>6</i>
<i>Figura 5. Distancias auxiliares de un observador a un árbol (perfil).</i>	<i>6</i>
<i>Figura 6. Pendiente de un terreno.</i>	<i>7</i>
<i>Figura 7. Visual horizontal del observador entre la punta y la base del árbol.</i>	<i>16</i>
<i>Figura 8. Visual horizontal del observador por arriba de la punta del árbol.</i>	<i>17</i>
<i>Figura 9. Visual horizontal del observador por abajo de la base del árbol.</i>	<i>19</i>
<i>Figura 10. Medición de alturas sin determinación de distancia horizontal.</i>	<i>20</i>
<i>Figura 11. Determinación de la altura cuando el pie del árbol es inaccesible.</i>	<i>21</i>
<i>Figura 12. Cruz del hachero.....</i>	<i>23</i>
<i>Figura 13. Relaciones de la cruz del hachero y la altura del árbol.</i>	<i>23</i>
<i>Figura 14. Aplicación de la escuadra de brazos iguales.</i>	<i>24</i>
<i>Figura 15. Utilización del hipsómetro del Merrit para alturas en número de trozas de 16 pies de longitud.</i>	<i>26</i>
<i>Figura 16. Fundamento y utilización del bastón hipsométrico.</i>	<i>28</i>
<i>Figura 17. Utilización del Hipsómetro de Christen para la determinación de alturas.</i>	<i>29</i>
<i>Figura 18. Visual horizontal del observador entre la punta y la base del árbol.</i>	<i>31</i>
<i>Figura 19. Visual horizontal del observador arriba de la punta del árbol.</i>	<i>32</i>
<i>Figura 20. Visual horizontal del observador abajo de la base del árbol.</i>	<i>34</i>
<i>Figura 21. Elementos para determinación de alturas sin determinación de distancia horizontal.....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 22. Pie del árbol inaccesible.....</i>	<i>37</i>
<i>Figura 23. Determinación de ángulos verticales mediante la fijación de una línea horizontal con un nivel de burbuja.</i>	<i>39</i>
<i>Figura 24. Determinación de ángulos verticales mediante la fijación de una línea horizontal con una plomada.....</i>	<i>40</i>
<i>Figura 25. Base para la construcción de una plancheta hipsométrica utilizando un transportador de ángulos y un índice pendular.....</i>	<i>41</i>
<i>Figura 26. Plancheta hipsométrica con escalas en grados y en porcentajes de pendiente.....</i>	<i>41</i>

<i>Figura 27. Plancheta hipsométrica con escalas en grados, en porcentajes de pendiente y para alturas a 15, 20, 25 y 30 m de distancia horizontal.....</i>	<i>42</i>
<i>Figura 28. Elementos del clisímetro o nivel de Abney.</i>	<i>43</i>
<i>Figura 29. Clisímetro o nivel de Abney.....</i>	<i>44</i>
<i>Figura 30. Elementos del Clinómetro Suunto.</i>	<i>45</i>
<i>Figura 31. Clinómetro Suunto.</i>	<i>45</i>
<i>Figura 32. Elementos del hipsómetro Blume-Leiss.....</i>	<i>47</i>
<i>Figura 33. Hipsómetro Blume-Leiss.</i>	<i>47</i>
<i>Figura 34. Elementos de la pistola Haga.....</i>	<i>48</i>
<i>Figura 35. Pistola Haga.....</i>	<i>49</i>
<i>Figura 36. Altura BD determinada en un árbol inclinado hacia el operador.</i>	<i>50</i>
<i>Figura 37. Altura BD determinada en un árbol inclinado en sentido opuesto al operador.</i>	<i>50</i>
<i>Figura 38. Error que se comete al determinar la altura de un árbol con un ángulo de inclinación de 20° hacia el operador, a una distancia horizontal de 20 m a la base.</i>	<i>51</i>
<i>Figura 39. Error que se comete al determinar la altura de un árbol con un ángulo de inclinación de 20° hacia el operador, a una distancia horizontal de 30 m a la base.</i>	<i>52</i>
<i>Figura 40. Error que se comete al determinar la altura de un árbol con un ángulo de inclinación de 20° en sentido opuesto al operador, a una distancia horizontal de 20 m a la base.</i>	<i>52</i>
<i>Figura 41. Reducción del error en la determinación de la altura de un árbol inclinado hacia el operador al tomar la distancia horizontal desde el punto de proyección de la punta del árbol.</i>	<i>53</i>
<i>Figura 42. Reducción del error en la determinación de la altura de un árbol inclinado en sentido opuesto al operador al tomar la distancia horizontal al punto de proyección de la punta del árbol.</i>	<i>54</i>
<i>Figura 43. Diámetro o circunferencia en sección circular.....</i>	<i>55</i>
<i>Figura 44. Diámetros en sección elíptica.....</i>	<i>55</i>
<i>Figura 45. Diámetros en sección de forma irregular.....</i>	<i>56</i>
<i>Figura 46. Diámetro normal (d), en terreno plano.</i>	<i>57</i>
<i>Figura 47. Diámetro normal (d), en terreno con pendiente.....</i>	<i>57</i>
<i>Figura 48. Diámetro normalizado (d) en árbol con contrafuertes; “A” es el punto en el que terminan éstos.</i>	<i>58</i>
<i>Figura 49. Diámetro normal en árbol con protuberancia a la altura de 1.3m.</i>	<i>58</i>
<i>Figura 50. Medición del diámetro normal en un árbol con fuste ondulado.</i>	<i>59</i>

<i>Figura 51. Medición del diámetro normal en árboles inclinados en terrenos plano e inclinado.</i>	59
<i>Figura 52. Medición del diámetro normal en árboles bifurcados.</i>	60
<i>Figura 53. Forcípula de brazos paralelos.</i>	61
<i>Figura 54. Forcípula de brazos paralelos con graduación en pulgadas.</i>	62
<i>Figura 55. Errores en la medición de diámetros por falta de paralelismo de los brazos (A) y por ésta y falta de tangencia en tres puntos (B).</i>	63
<i>Figura 56. Cinta diamétrica; relación entre el diámetro y la circunferencia.</i>	64
<i>Figura 57. Medición del diámetro normal con cinta diamétrica.</i>	64
<i>Figura 58. Base geométrica de la regla de Biltmore.</i>	65
<i>Figura 59. Forcípula de brazo parabólico.</i>	68
<i>Figura 60. Forcípula en forma de V.</i>	69
<i>Figura 61. Sección transversal circular con elementos para el cálculo de su superficie.</i>	70
<i>Figura 62. Sección transversal elíptica con elementos para el cálculo de su superficie.</i>	72
<i>Figura 63. Proceso de obtención de chapa de madera; área de laminado.</i>	80
<i>Figura 64. Diferentes tipos de medidores de corteza.</i>	81
<i>Figura 65. Medidor de corteza.</i>	82
<i>Figura 66. Paraboloide de revolución cortado por planos a distancias δx, lo que genera segmentos con grosor δx y radios y.</i>	85
<i>Figura 67. Segmentos de alturas δx y de radios y en un paraboloide de revolución de altura total h y diámetro de la base igual a r.</i>	85
<i>Figura 68. Parábolas generadas al graficar valores x e y obtenidos con diferentes valores del exponente “n”.</i>	87
<i>Figura 69. Identificación de los diferentes tipos dendrométricos o de sus truncados en el fuste de un árbol.</i>	87
<i>Figura 70. Cilindro.</i>	88
<i>Figura 71. Paraboloide apolónico.</i>	89
<i>Figura 72. Cono.</i>	92
<i>Figura 73. Neiloide.</i>	94
<i>Figura 74. División de un fuste en trozas de diferente longitud para la determinación de su volumen.</i>	98
<i>Figura 75. Dimensiones necesarias para la aplicación de la fórmula de Smalian en la determinación de volúmenes de fustes o trozas.</i>	99

<i>Figura 76. Dimensiones necesarias para la aplicación de la fórmula de Huber en la determinación de volúmenes de fustes o trozas.</i>	<i>100</i>
<i>Figura 77. Dimensiones necesarias para la aplicación de la fórmula de Huber modificada en la determinación de volúmenes de fustes o trozas.</i>	<i>101</i>
<i>Figura 78. Obtención de la fórmula de Newton para la determinación del volumen de fustes y trozas.</i>	<i>102</i>
<i>Figura 79. Aplicación de la fórmula de Newton para la determinación del volumen de trozas y fustes.</i>	<i>103</i>
<i>Figura 80. Fuste sin punta dividido en un número par de trozas para la aplicación de la fórmula de Simpson.</i>	<i>104</i>
<i>Figura 81. Fuste sin punta dividido en trozas de longitud desigual para la aplicación de la fórmula de Heyer.</i>	<i>105</i>
<i>Figura 82. Fuste sin punta dividido en trozas de igual longitud para la aplicación de la fórmula de Heyer.</i>	<i>106</i>
<i>Figura 83. Fuste sin punta dividido en un número par (n) de trozas de longitud desigual para fórmula de Kuntze.</i>	<i>106</i>
<i>Figura 84. Fuste sin punta dividido en un número impar (n-1), de trozas de igual longitud para la aplicación de la fórmula de Kuntze.</i>	<i>107</i>
<i>Figura 85. Secciones transversales menor (S_1), media (S_m) y mayor (S_0) de un truncado de paraboloides.</i>	<i>111</i>
<i>Figura 86. Base de cálculo del coeficiente mórfico.</i>	<i>130</i>
<i>Figura 87. Determinación del volumen de tocones.</i>	<i>132</i>
<i>Figura 88. Xilómetro.</i>	<i>137</i>
<i>Figura 89. Determinación del área de secciones transversales de leñas en un apilamiento. A. Calcado en papel transparente o fotografía de secciones. B. Calcado en plantilla de puntos. C. Calcado en plantilla cuadrículada.</i>	<i>139</i>
<i>Figura 90. Base de cálculo del volumen real utilizando coeficientes de apilamiento.</i>	<i>141</i>
<i>Figura 91. Raja de leña de 24 por 24.</i>	<i>141</i>
<i>Figura 92. Medición de la longitud y altura de una pila de leña en terreno inclinado.</i>	<i>143</i>
<i>Figura 93. Pie tabla.</i>	<i>144</i>
<i>Figura 94. Construcción de reglas de estimación maderera por el método de diagramas.</i>	<i>147</i>
<i>Figura 95. Anillo circular con grosor b, que representa las pérdidas por costeras y orillas al aserrarse una troza.</i>	<i>152</i>
<i>Figura 96. Troza de cuatro pies de longitud y diámetro de la sección menor sin corteza en pulgadas (D_{sc}), base de la regla Internacional.</i>	<i>153</i>

<i>Figura 97. Troza de 16 pies de longitud y diámetro de la sección menor sin corteza en pulgadas (Dsc), para la aplicación de la fórmula de la regla Internacional para trozas de 4 pies.</i>	<i>155</i>
<i>Figura 98. Grosor de piezas necesario para obtener una tabla de 1" de grueso en aserradero con sierra banda y con sierra circular.</i>	<i>157</i>
<i>Figura 99. Base de cálculo del índice o coeficiente de forma.....</i>	<i>174</i>
<i>Figura 100. Diagramas de dispersión con tipos de correlaciones lineales.....</i>	<i>182</i>
<i>Figura 101. Cálculo gráfico del coeficiente de correlación.</i>	<i>183</i>
<i>Figura 102. Magnitud de desviaciones respecto a línea de "mejor ajuste".</i>	<i>188</i>
<i>Figura 103. Comprobación del método de mínimos cuadrados para el ajuste de datos a modelos matemáticos lineales.....</i>	<i>198</i>
<i>Figura 104. Forma de lanzamiento de radios y estacado en la periferia, en el levantamiento de un sitio circular de muestreo.</i>	<i>256</i>
<i>Figura 105. Sitios normales de muestreo en bosques de clima templado y frío.....</i>	<i>256</i>
<i>Figura 106. Forma de delimitar un sitio rectangular.</i>	<i>257</i>
<i>Figura 107. Sitios rectangulares colaterales para bosques de clima cálido húmedo.....</i>	<i>258</i>
<i>Figura 108. Distribución de la muestra (36 sitios) bajo un patrón sistemático.</i>	<i>264</i>
<i>Figura 109. Representación gráfica de la distribución sistemática en superficie conocida y equidistancias fijas y obligadas entre líneas y sitios.....</i>	<i>266</i>

Tabla de Tablas.

<i>Tabla 1. Compensaciones para diferentes longitudes de cables y pendientes con sus correspondientes inclinaciones en grados.</i>	<i>8</i>
<i>Tabla 2. Fórmulas de cubicación.</i>	<i>108</i>
<i>Tabla 3. Errores en la determinación de volúmenes.</i>	<i>127</i>
<i>Tabla 4. Tabla de coeficientes mórficos.</i>	<i>131</i>
<i>Tabla 5. Dimensiones de juegos de cambio para vías de ferrocarril.</i>	<i>163</i>
<i>Tabla 6. Hoja de registro para la toma de datos en la cubicación de árboles para la construcción de tablas de volúmenes.</i>	<i>179</i>
<i>Tabla 7. Tabulación para el cálculo del coeficiente de correlación (r).</i>	<i>184</i>
<i>Tabla 8. Tabulación para el cálculo de coeficientes en regresión lineal simple.</i>	<i>191</i>
<i>Tabla 9. Tabulación de datos para el cálculo de coeficientes en regresión lineal simple.</i>	<i>194</i>
<i>Tabla 10. Ejemplo de ecuaciones de regresión para la construcción de tablas de volúmenes.</i>	<i>203</i>
<i>Tabla 11. Ecuaciones estimadas para la elaboración de tablas de volúmenes de fuste total con corteza del genero Pinus para ocho entidades federativas del país.</i>	<i>206</i>
<i>Tabla 12. Ecuaciones estimadas para la elaboración de tablas de volúmenes de fuste total con corteza de algunas especies de latifoliadas de tres entidades federativas del país.</i>	<i>206</i>
<i>Tabla 13. Tabla de volúmenes de fuste total para Pinus hartwegii en la Estación Forestal Experimental Zoquiapan, estado de México.</i>	<i>210</i>
<i>Tabla 14. Importancia Relativa de los Elementos de un Inventario Forestal.</i>	<i>223</i>
<i>Tabla 15. Símbolos de parámetros y de estimadores.</i>	<i>236</i>
<i>Tabla 16. Volumen en lotes de tres bloques con el mismo promedio y diferente variabilidad.</i>	<i>251</i>
<i>Tabla 17. Valores en los Bosques B y C para el cálculo de estadísticos.</i>	<i>251</i>
<i>Tabla 18. Cálculo de los estadísticos de los bosques B y C.</i>	<i>251</i>
<i>Tabla 19. Resumen de los estadísticos de tres bosques con el mismo volumen promedio y diferente variabilidad.</i>	<i>252</i>
<i>Tabla 20. Dimensiones de los sitios normales de muestreo empleados en bosques de clima templado y frío.</i>	<i>256</i>
<i>Tabla 21. Dimensiones de los sitios rectangulares colaterales de muestreo empleados en bosques de clima cálido húmedo.</i>	<i>258</i>

Tabla de Tablas.

<i>Tabla 22. Determinación del número de sitios de muestreo con base en su superficie y en la superficie a muestrear.....</i>	<i>259</i>
<i>Tabla 23. Censo de una población forestal.....</i>	<i>261</i>
<i>Tabla 24. Tabulación de datos del censo de una población forestal.</i>	<i>262</i>
<i>Tabla 25. Volúmenes de los sitios obtenidos con un muestreo sistemático de una población.....</i>	<i>266</i>
<i>Tabla 26. Tabulación de datos obtenidos en muestreo sistemático.</i>	<i>267</i>
<i>Tabla 27. Ubicación de diez sitios de premuestra en distribución aleatoria.....</i>	<i>272</i>
<i>Tabla 28. Tabulación de datos del premuestreo.</i>	<i>273</i>
<i>Tabla 29. Ubicación de treinta y tres sitios de muestreo en distribución aleatoria.....</i>	<i>274</i>
<i>Tabla 30. Tabulación de volúmenes de 33 sitios de muestreo en distribución aleatoria.</i>	<i>275</i>
<i>Tabla 31. Resumen comparativo de diferentes tipos de muestreo.....</i>	<i>278</i>
<i>Tabla 32. Comparación de resultados entre censo y muestreo sistemático y aleatorio.....</i>	<i>279</i>

1 Generalidades.

1.1 *Dasometría o Medición Forestal.*

El contenido conceptual de un término o de una definición puede estar afectado por el sentido que el autor le dé, y también por la evolución científica, técnica y práctica que haya tenido la materia u objeto de estudio, por lo que existen además términos homólogos en uno o en diferentes idiomas.

Por tales motivos es necesario revisar las definiciones de varios autores a fin de establecer o adoptar alguna que se adecue a la concepción que en México se tiene de la Dasometría.

Según el diccionario enciclopédico **UTEHA**, la Dasometría es una parte de la estereometría que se ocupa de la medida del monte, en el sentido más amplio de la expresión, la cual proviene de las palabras griegas *dasos*, **bosque**, y *metrón*, **medida**.

En francés se conoce como *dendrometrie*, y en 1919 Huffel, citado por Pardé, dijo de ella que “nos enseña a determinar el volumen de los productos del bosque”.

En inglés se llama *forest mensuration*, y también *forest measurement*. Husch, Miller y Beers (1972) consideran adecuada todavía la definición dada por Graves en 1906 que dice: “La medición forestal trata de la determinación del volumen de trozas, árboles y rodales, y también de su incremento y producción”.

En alemán se conoce como *messung der waldbestande* (medición de masas) y de ésta, Prodan, citado por Basurco (1973), señala que trata de la medición y/o cálculo de las magnitudes que definen el contenido y la forma de los árboles y de las masas.

En México, Villa Salas, en 1971 definió a la Dasometría como la parte de la Dasonomía o Ciencia Forestal que estudia la medición de los bosques o de sus productos a través de las dimensiones de los elementos que los constituyen, considerando como tales a los árboles o a las partes de éstos que serán aprovechados en alguna forma.

En Rusia, Anuchin apunta: “El término medición forestal implica la determinación del volumen de árboles completos y de sus partes, las existencias de

madera en rodales, la edad y el incremento de árboles individuales y de rodales completos”.

Como ocurre con todas las definiciones, es difícil que una sola comprenda o condense todos y cada uno de los aspectos de una determinada materia, pero los ejemplos expuestos bastan para dar una idea de la materia a tratar.

Para efectos de este libro se adoptará la definición de Anuchin, por considerar que cubre íntegramente el contenido de la materia y la concepción que de la Dasometría se tiene en nuestro país, agregándole “así como la magnitud y volumen de sus productos”, para quedar como sigue:

El término medición forestal o Dasometría implica la determinación del volumen de árboles completos y de sus partes, las existencias de madera en rodales, la edad y el incremento de árboles individuales y de rodales completos, así como la magnitud y volumen de sus productos.

1.2 Bosquejo Histórico.

Desde hace mucho tiempo se comercializa la madera, y para cuantificarla se recurre a diversos procedimientos que pueden o no tener una base matemática. Por ejemplo, en el caso de la leña, ésta se partía en rajadas o trozos de igual longitud y se apilaba rodeándola con una “cuerda” de longitud conocida, lo que dio origen a la unidad de cubicación denominada cuerda, que aún se utiliza en el país. En otros casos se apilaban piezas de 1 m de largo y se conformaba una pila de 1m x 1m x 1m, igual a 1 m³, conocido como estéreo. Otra unidad establecida por la costumbre es el zontle, el cual comprende 400 rajadas de leña de la misma medida. Para estimar el valor de un árbol en pie se recurre o recurría a la cantidad de piezas de madera que se podían extraer de él. En el siglo XVIII se inició la cuantificación de madera considerando el volumen del tronco, hasta llegar a los procedimientos más modernos aplicados actualmente como son los principios ópticos y de muestreo estadístico con utilización del cómputo electrónico.

1.3 División de la Dasometría.

Para fines de estudio, la Dasometría se divide en dos partes:

Dendrometría. Del griego *dendron*, árbol, y *metrón*, medida, es la medición, cálculo y/o estimación de las dimensiones de los árboles y bosques; analiza las dimensiones de árboles y bosques desde un punto de vista estático.

Epidometría. Proviene del griego *epidoma*, crecimiento, y *metrón*, medida. Es la medición, cálculo y/o estimación del crecimiento y producción de árboles y bosques; analiza las dimensiones de los árboles y bosques desde un punto de vista dinámico.

1.4 Medición Directa, Cálculo y Estimación.

La medición directa es un procedimiento sencillo que sólo requiere el conocimiento de ciertos instrumentos especiales que se usan para medir dimensiones accesibles.

Sin embargo, no siempre es posible medir ciertas dimensiones y en otros casos es más costoso medirlas que calcularlas, esto es, con base en dimensiones fáciles de medir se calculan aquellas que presentan cierto grado de dificultad en su medición.

Las estimaciones son un producto de mediciones directas y/o cálculos y pueden implicar un muestreo; permiten determinar magnitudes sin medirlas directamente y aun hacer predicciones.

1.5 Nociones Matemáticas.

Para la medición forestal son necesarios los conocimientos fundamentales del álgebra y la trigonometría. Es también aplicable la topografía (agrimensura), y para la estimación de volúmenes de madera por unidad de superficie es necesario tener conocimientos de estadística y de muestreo.

1.5.1 Funciones Naturales de Ángulos.

En todos los triángulos rectángulos, como el de la **Figura 1**, se tienen las siguientes funciones naturales:

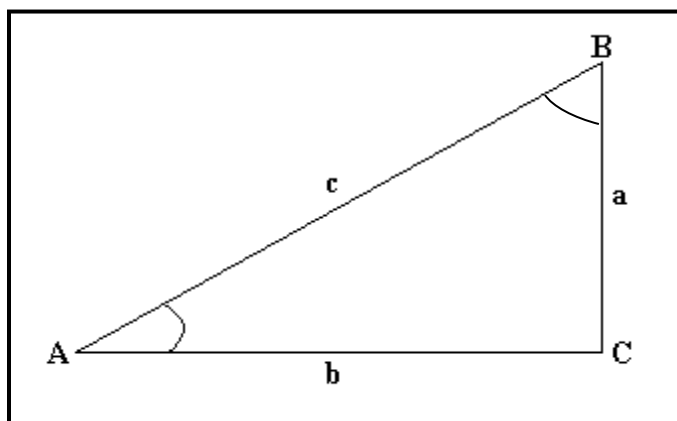


Figura 1. Triángulo rectángulo.

$$\text{Sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} = \text{Cos } B$$

$$\text{Cos } A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} = \text{Sen } B$$

$$\text{Tan } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b} = \text{Cot } B$$

$$\text{Cot } A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a} = \text{Tan } B$$

$$\text{Sec } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b} = \text{Csc } B$$

$$\text{Csc } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a} = \text{Sec } B$$

$$a = c * \text{Sen } A = b * \text{Tan } A = c * \text{Cos } B = b * \text{Cot } B$$

$$b = c * \text{Cos } A = a * \text{Cot } A = c * \text{Sen } B = a * \text{Tan } B$$

$$c = \frac{a}{\text{Cos } B} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Cos } A}$$

En el caso de los triángulos oblicuángulos (**Figura 2**), la búsqueda de un lado requiere el conocimiento de dos lados y un ángulo o de dos ángulos y un lado.

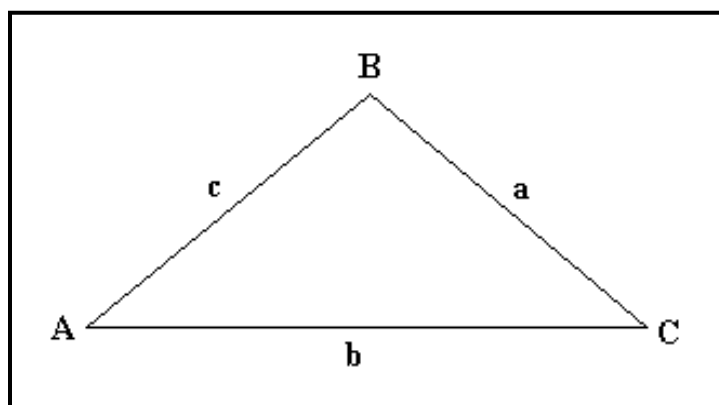


Figura 2. Triángulo oblicuángulo.

$$a = \frac{b \cdot \text{sen } A}{\text{sen } B} = \frac{c \cdot \text{sen } A}{\text{sen } C}$$

1.5.2 Teorema de Pitágoras.

El teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo (**Figura 3**), la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos. De esa expresión se puede obtener, despejando, los valores de cada uno de los catetos.

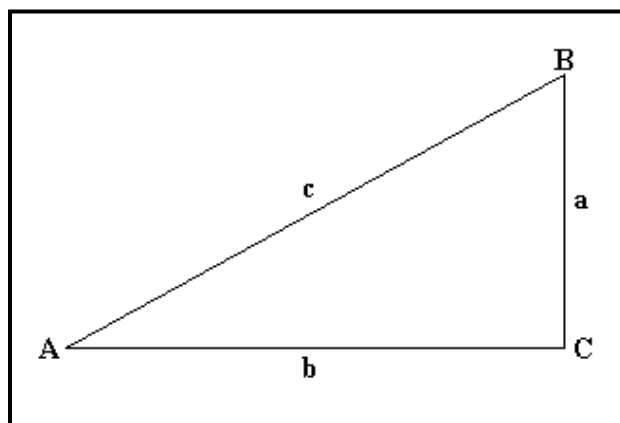


Figura 3. Lados de un triángulo rectángulo.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

1.5.3 Distancias Auxiliares.

1.5.3.1 Con respecto al árbol.

Es importante, en medición forestal, considerar algunas distancias auxiliares para la determinación de algunas dimensiones (**Figuras 4 y 5**).

OD = Distancia del observador al árbol.

OA = Distancia del observador al punto de tangencia.

OC = Distancia del observador al centro del árbol.

OH = Distancia inclinada del observador a la base del árbol.

OG = Distancia horizontal del observador al árbol.

OF = Distancia inclinada del observador a la parte superior del árbol.

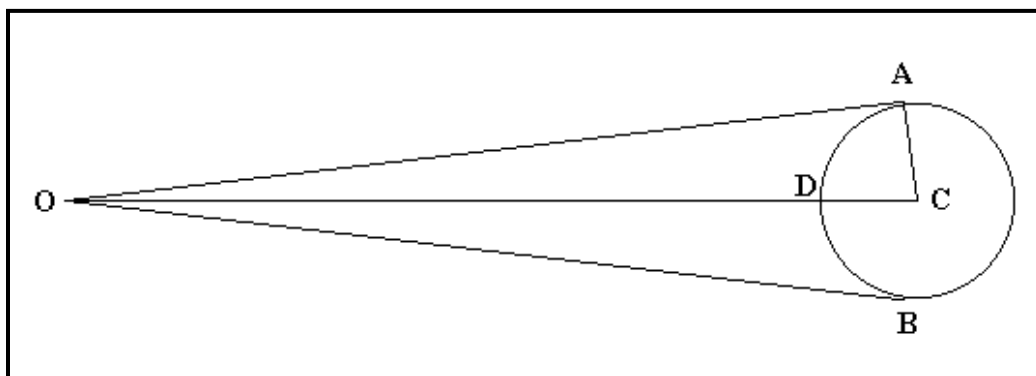


Figura 4. Distancias auxiliares de un observador a un árbol (planta).

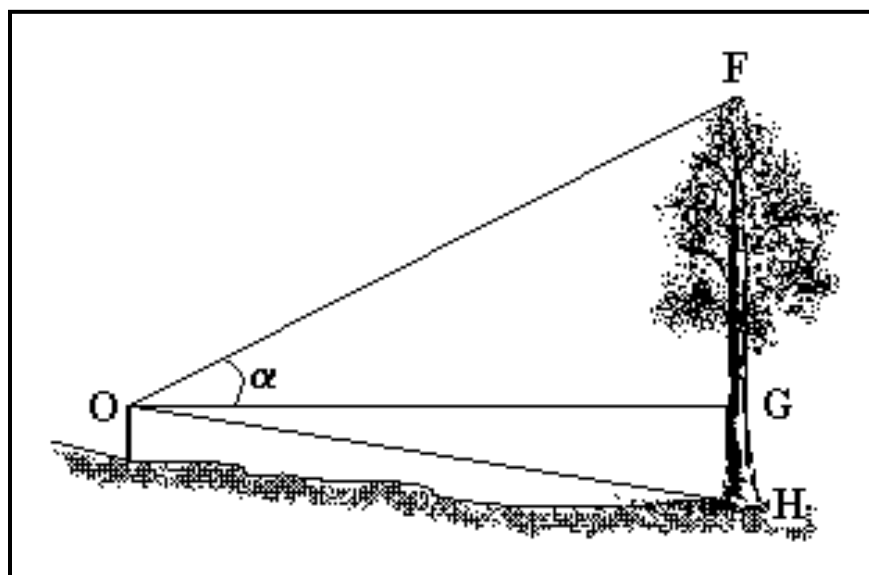


Figura 5. Distancias auxiliares de un observador a un árbol (perfil).

Las distancias OH y OG se pueden determinar por medición directa, con facilidad, cuando el terreno es plano.

La distancia OF se calcula con base en la distancia horizontal OG y el ángulo α utilizando la función natural coseno:

$$\cos \alpha = \frac{OG}{OF} \quad \therefore \quad OF = \frac{OG}{\cos \alpha}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras, siendo OF la hipotenusa del triángulo rectángulo OFG .

$$OF = \sqrt{OG^2 + GF^2}$$

La distancia GF puede calcularse:

$$GF = OG * \tan \alpha$$

$$GF = \sqrt{OF^2 - OG^2}$$

1.5.3.2 Con respecto al terreno.

La pendiente en por ciento de un terreno (m), es igual a la tangente del ángulo de inclinación multiplicada por cien (**Figura 6**).

$$m = \tan \alpha * 100$$

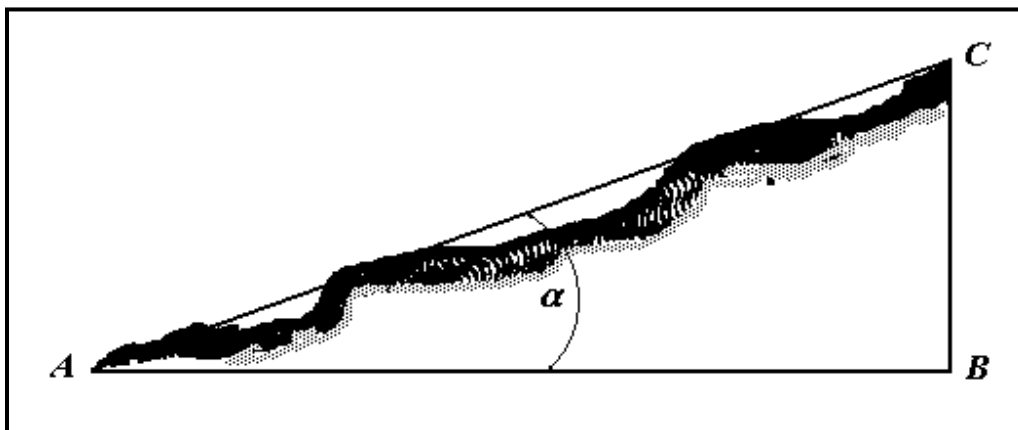


Figura 6. Pendiente de un terreno.

Cuando el terreno es inclinado la distancia horizontal es más útil, ya que permite establecer relaciones trigonométricas o geométricas y también la proyección horizontal en planos o mapas.

$$AB = AC * \cos A$$

En ocasiones es necesario conocer la distancia inclinada para una distancia horizontal dada y un declive del terreno conocido en pendiente (**Tabla 1**).

Tabla 1. Compensaciones para diferentes longitudes de cables y pendientes con sus correspondientes inclinaciones en grados.

Pendientes %	Longitud del cable de medición				Inclinación en grados
	10	17.84*	20	30	
	Longitudes compensadas				
5	10.01	17.86	20.03	30.04	2°52'
10	10.05	17.92	20.10	30.14	5°43'
15	10.11	18.03	20.22	30.34	8°32'
20	10.20	18.19	20.40	30.59	11°19'
25	10.31	18.39	20.62	30.92	14°02'
30	10.44	18.62	20.88	31.32	16°42'
35	10.59	18.90	21.19	31.78	19°17'
40	10.77	19.21	21.54	32.31	21°48'
45	10.97	19.56	21.93	32.90	24°14'
50	11.18	19.95	22.36	33.54	26°34'
55	11.41	20.36	22.83	34.24	28°49'
60	11.66	20.80	23.32	34.99	30°58'
65	11.93	21.28	23.85	35.77	33°01'
70	12.22	21.77	24.41	36.92	35°00'
75	12.50	22.30	25.00	37.50	36°52'
80	12.80	22.85	25.61	38.42	38°40'
85	13.12	23.41	26.25	39.37	40°22'
90	13.45	23.99	26.90	40.36	41°59'
95	13.79	24.61	27.59	41.38	43°32'
100	14.14	25.23	28.28	42.43	45°00'

* Radio de un sitio circular de 1000 m²

Para la determinación de una distancia inclinada, dada una distancia horizontal y una pendiente conocida como pueden ser 10 m y 29% de pendiente, se obtiene mediante la utilización de las siguientes relaciones:

$$\text{Pendiente del terreno} = 29^\circ \qquad \cos A = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{Distancia horizontal} = AB = 10 \text{ m} \qquad AC = \frac{AB}{\cos A}$$

$$\text{Distancia inclinada} = AC = ? \qquad AC = \frac{10}{0.8746} \qquad AC = 11.43 \text{ m}$$

Si lo que conocemos es la pendiente del terreno, basta dividir dicho valor entre cien y obtener el arco tangente del valor resultante, es decir, obtener el valor del ángulo de inclinación del terreno que nos define la pendiente y proceder como se ha anotado anteriormente.

1.5.4 Métodos para Medir Distancias.

1.5.4.1 Directos.

Se miden las distancias accesibles utilizando pasos e instrumentos tales como cintas, telémetros, cadenas, relascopios, etcétera.

1.5.4.2 Indirectos.

Se miden las distancias inaccesibles utilizando relaciones geométricas (teoremas) o relaciones trigonométricas (funciones naturales).

1.6 Unidades de Medición.

En México, legalmente se establece el uso de unidades del sistema métrico decimal, y se reconoce que la unidad básica es el metro con múltiplos y submúltiplos. Sin embargo, en transacciones comerciales de madera son de uso cotidiano unidades del sistema inglés y también otras unidades de uso específico en medición de madera, basadas en ese sistema.

1.6.1 Unidades de Longitud.

Sistema métrico

Metro (m)
Centímetro (cm)
Kilómetro (Km)

Sistema inglés

Pulgada (in)
Pie (ft)
Yarda (yd)
Cadena (ch)
Milla (mi)

1.6.2 Unidades de Superficie.

Sistema métrico

Centímetro cuadrado (cm²)
Metro cuadrado (m²)
Hectárea (ha)

Sistema inglés

Pulgada cuadrada (sq in)
Pie cuadrado (sq ft)
Acre (a)

1.6.3 Unidades de Volumen.

Sistema métrico

Centímetro cúbico (cm³)
Metro cúbico (m³)

Sistema inglés

Pulgada cúbica (cu in)
Pie cúbico (cu ft)

Para la medición de las diferentes dimensiones en Dasometría generalmente se utilizan las siguientes unidades:

Dimensiones	Sistema Métrico	Sistema Inglés
Diámetros y circunferencias	Centímetro	Pulgadas
Alturas	Metro	Pies
Volúmenes	Metro cúbico	Pies cúbicos
Superficies	Hectárea	Acre

1.7 Equivalencias y Conversión de Unidades.

Debido a que en el comercio de la madera se usan unidades inglesas, a que la mayoría de los textos especializados están en idioma inglés, y a que en México se deben usar unidades métricas, es importante conocer la equivalencia y la conversión de las unidades de medición más usuales.

1.7.1 Equivalencias.

1.7.1.1 Unidades de longitud.

1 metro equivale a	39.3701 pulgadas
1 metro equivale a	3.2808 pies
1 metro equivale a	1.0936 yardas
1 pulgada equivale a	2.5400 centímetros
1 pie equivale a	12 pulgadas = 0.3048 m
1 cadena equivale a	66 pies = 20.1168 m
1 yarda equivale a	3 pies = 0.9144 m
1 milla equivale a	1,609.34 m
1 kilómetro equivale a	0.6213720 mi

1.7.1.2 Unidades de superficie.

1 metro cuadrado equivale a	10.7639 pies cuadrados
1 acre equivale a	0.4047 hectáreas
1 hectárea equivale a	2.4710 acres
1 centímetro cuadrado equivale a	0.1550 pulgadas cuadradas
1 km ² equivale a	247.1044 acres
1 pie cuadrado equivale a	0.0929 metros cuadrados

1.7.1.3 Unidades de volumen.

1 metro cúbico equivale a	35.3145 pies cúbicos
1 pie cúbico equivale a	0.0283 metros cúbicos

En la industria forestal una unidad de especial interés es el pie tabla. Es el volumen contenido en un paralelepípedo cuyas dimensiones son 12 x 12 x 1 pulgadas y cuya equivalencia en el sistema métrico es: 1 pie tabla equivale a 0.0023597 m³ y el m³ equivale a 423.776 pies tabla.

1.7.2 Conversión.

Para convertir valores de unidades de medición de un sistema a otro, se han generado una serie de factores de conversión, que, como su nombre lo indica, son números por los cuales hay que multiplicar las cantidades dadas en alguna unidad de medición para obtener las que corresponden en otra.

1.7.2.1 Unidades de longitud.

<i>Para convertir:</i>	<i>Multiplíquese por:</i>
Pulgadas a centímetros	2.5400
Centímetros a pulgadas	0.3937
Pies a metros	0.3048
Metros a pies	3.2808
Yardas a metros	0.9144
Metros a yardas	1.0936

1.7.2.2 Unidades de superficie.

<i>Para convertir:</i>	<i>Multiplíquese por:</i>
Pulgadas cuadradas a centímetros cuadrados	6.4516
Centímetros cuadrados a pulgadas cuadradas	0.1550
Pies cuadrados a metros cuadrados	0.0929
Metros cuadrados a pies cuadrados	10.7639
Millas cuadradas a kilómetros cuadrados	2.5900
Kilómetro cuadrado a millas cuadradas	0.3861
Acres a hectáreas	0.4047
Hectáreas a acres	2.4710
Pies cuadrados/acre a metros cuadrados/ha	0.2296
Metros cuadrados/ha a pies cuadrados/acre	4.3561

1.7.2.3 Unidades de volumen.

<i>Para convertir:</i>	<i>Multiplíquese por:</i>
Pulgadas cúbicas a centímetros cúbicos	16.3871
Centímetros cúbicos a pulgadas cúbicas	0.0610
Pies cúbicos a metros cúbicos	0.0283
Metros cúbicos a pies cúbicos	35.3145
Pies cúbicos/acre a metros cúbicos/ha	0.0700
Metros cúbicos/ha a pies cúbicos/acre	14.2913

2 Medición de Árboles.





El objeto fundamental de la Dendrometría es la medición, cálculo o estimación de las dimensiones de árboles y de bosques. Naturalmente, para facilitar las mediciones de bosques, es necesario medir sus partes estructurales, esto es, medir a los árboles.

La medición de las dimensiones de los árboles, a su vez, debe considerar a cada dimensión por separado para, finalmente, de la complementación de esas dimensiones conocer el volumen de madera que cada árbol contiene. Por otra parte, no siempre es el volumen la dimensión de interés, sino que pueden serlo otras como la altura total, alguna altura parcial, el área basal, etcétera.

La Dendrometría en general no es un fin en sí misma, ya que no resultaría importante conocer las dimensiones de árboles y bosques por sí mismas, sino que se trata de un medio básico en la administración del recurso. Así, por ejemplo, la altura de los árboles puede reflejar la capacidad productiva de un terreno; el volumen de madera aprovechable permite determinar el valor económico de un bosque y el tamaño de las industrias a instalar, etcétera.

2.1 Medición de Alturas.

En relación con las alturas, según la parte del árbol de que se trate, se distinguen:

-  Altura total: del suelo hasta el ápice de la copa.
-  Altura del fuste: del suelo hasta la base de la copa.
-  Altura de la copa: la diferencia entre las dos anteriores.
-  Altura comercial: la parte del fuste que se aprovecha; ésta se determina por el diámetro de la parte superior (diámetro mínimo comercial) o por defectos (nudos, torceduras, bifurcaciones) y por la altura del tocón.

Cuando se mide la altura, la precisión está en función de los fines para los cuales se hace esa medición, y varía de 10 cm a 1 m de aproximación; es factible obtener mayor precisión pero esto implica más tiempo y el uso de aparatos sofisticados.

Para la medición de alturas de árboles se emplean dos procedimientos básicos: directo e indirecto.





Para realizar la medición directa de la altura se escala el árbol y se efectúa la toma de longitud mediante el empleo de cintas métricas o pértigas graduadas. También cabe, en su caso, el derribo del árbol. Apeado éste, se mide la longitud de su tronco o fuste y se obtiene la altura.

El procedimiento anterior es por demás riesgoso para los escaladores, costoso y en ocasiones inaplicable; asimismo, es ineficaz en casos en que no convenga derribar el árbol. Sin embargo, en casos experimentales y otros, es necesario recurrir a este procedimiento.

Los conceptos anteriores resaltan la importancia que tiene el empleo de los procedimientos indirectos para medición de la altura. Dichos procedimientos incluyen varios métodos donde se recurre a principios geométricos o trigonométricos.

A continuación se observa el principio en que se basan y los aparatos o instrumentos más usuales en la medición indirecta de la altura de los árboles, estableciendo de antemano que el método geométrico se funda en el conocimiento de relaciones de triángulos semejantes y el trigonométrico en el de los ángulos que forman con el horizonte las visuales dirigidas a la cima y al pie del árbol.

Dentro de cada uno de estos procedimientos caben nuevas divisiones correspondientes a otras tantas circunstancias especiales que se pueden presentar, entre las que se mencionan:

-  Que el pie del árbol sea accesible o inaccesible al observador.
-  Que la distancia entre el observador y el árbol sea fija o variable.
-  Que la visual horizontal del observador toque algún punto entre la base y la punta del árbol, pase por arriba de la punta o por abajo de la base del árbol.
-  Que se requiera o no la determinación directa de la distancia horizontal entre el observador y el árbol.

2.1.1 Métodos Geométricos.

2.1.1.1 Pie del árbol accesible.

2.1.1.1.1 Visual horizontal del observador entre la punta y el pie del árbol.

En la determinación de alturas de árboles, uno de los casos más frecuentes es cuando el pie del árbol es accesible al operador, la distancia horizontal puede ser determinada y la visual horizontal del operador, dirigida al individuo a medir, toca un punto entre la punta y la base de éste y son visibles desde el punto de observación esos extremos.

En la **Figura 7** se ilustra el caso en el que, en el punto **O** se tiene un operador u observador provisto de una regla graduada auxiliar, paralela al árbol a medir a una distancia horizontal conocida. La visual horizontal del observador toca algún punto del árbol.

Para este caso y los siguientes, correspondientes a determinación de alturas utilizando principios geométricos, los significados de las literales son los siguientes:

Visuales: **OA** y **OB**

Elemento auxiliar: Regla graduada paralela al eje del árbol.

Dimensiones conocidas:

Oc = distancia horizontal del ojo del observador a la regla.

ac = distancia vertical en la regla; segmento definido por los puntos en los que las visuales horizontal y a la punta del árbol, tocan la regla.

bc = distancia vertical en la regla; segmento definido por los puntos en los que las visuales horizontal y a la base del árbol, tocan la regla.

OC = distancia horizontal entre observador y árbol.

Incógnita:

AB = h = altura total del árbol.

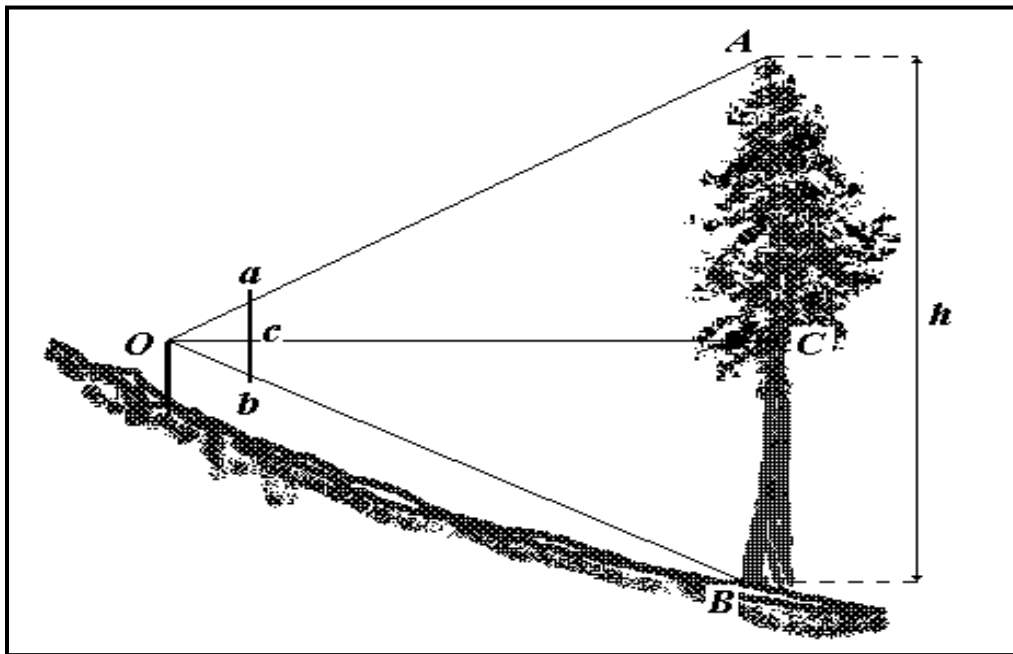


Figura 7. Visual horizontal del observador entre la punta y la base del árbol.

En la **Figura 7** se tiene que:

OAC y Oac son triángulos semejantes por lo que puede establecerse la siguiente proporcionalidad:

$$\frac{AC}{ac} = \frac{OC}{Oc} \quad \therefore AC = \frac{OC * ac}{Oc}$$

Asimismo, OBC y Obc son triángulos semejantes por lo que se puede establecer que:

$$\frac{BC}{bc} = \frac{OC}{Oc} \quad \therefore BC = \frac{OC * bc}{Oc}$$

$$AB = AC + BC = h; \quad h = \frac{OC * (ac + bc)}{Oc}$$

$$h = \frac{OC * ab}{Oc}$$

2.1.1.1.2 Visual horizontal del observador por arriba de la punta del árbol.

Un segundo caso que se puede presentar cuando se están determinando alturas de árboles, es cuando la visual horizontal del observador pasa por arriba de la punta del árbol (**Figura 8**).

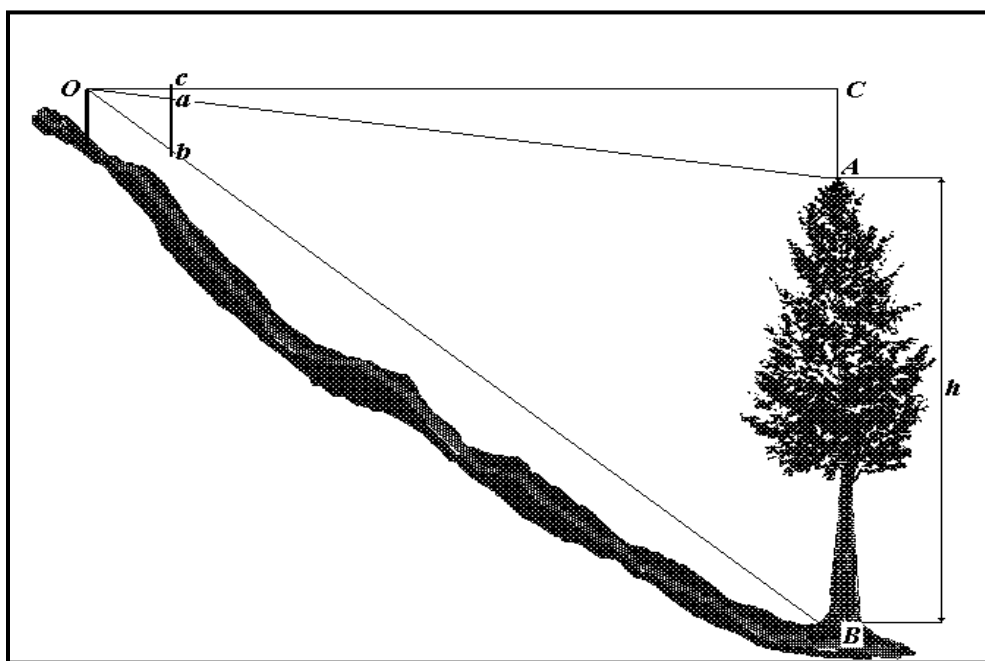


Figura 8. Visual horizontal del observador por arriba de la punta del árbol.

Como puede observarse en la **Figura 8**, los triángulos OCB y Ocb son semejantes por lo que existe proporcionalidad entre sus lados:

$$\frac{BC}{bc} = \frac{OC}{Oc} \quad \therefore BC = \frac{OC * bc}{Oc}$$

Asimismo, OCA y Oca son triángulos semejantes por lo que se puede establecer que:

$$\frac{AC}{ac} = \frac{OC}{Oc} \quad \therefore AC = \frac{OC * ac}{Oc}$$

$$AB = BC - AC = h; \quad h = \frac{OC * (bc - ac)}{Oc}$$

$$h = \frac{OC * ab}{Oc}$$

2.1.1.1.3 Visual horizontal del observador por abajo de la base del árbol.

El tercer caso en la determinación de alturas de árboles, en relación a la ubicación de la visual horizontal del observador respecto al árbol, se presenta cuando ésta pasa por abajo de la base del árbol, situación que se ilustra en la **Figura 9**.

En la dicha figura se puede observar que los triángulos *OAC* y *Oac* son semejantes, de tal forma que podemos expresar la siguiente proporcionalidad:

$$\frac{AC}{ac} = \frac{OC}{Oc} \quad \therefore AC = \frac{OC * ac}{Oc}$$

De la misma manera, en los triángulos *OBC* y *Obc* que son semejantes se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\frac{BC}{bc} = \frac{OC}{Oc} \quad \therefore BC = \frac{OC * bc}{Oc}$$

De esta manera, la altura *AB* del árbol, es igual a:

$$AB = AC - BC = h; \quad h = \frac{OC * (ac - bc)}{Oc}$$

$$h = \frac{OC * ab}{Oc}$$

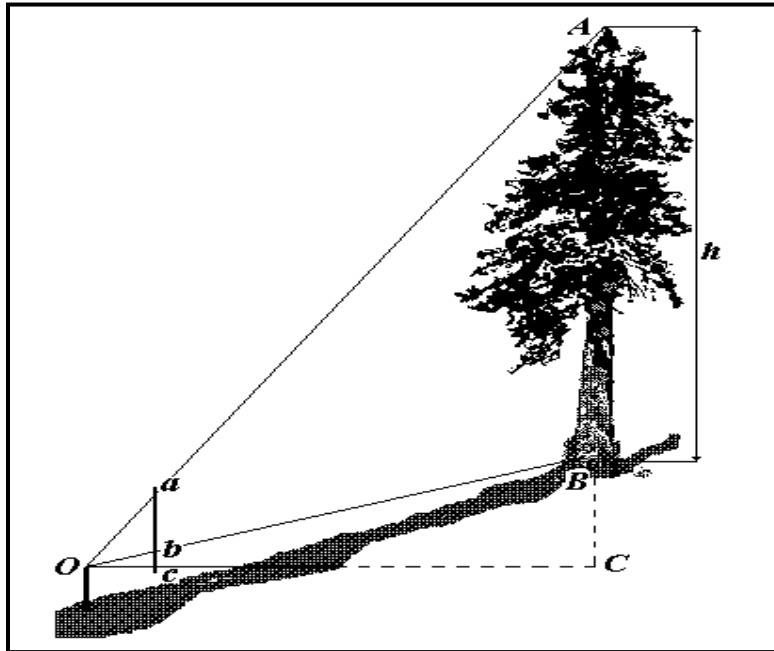


Figura 9. Visual horizontal del observador por abajo de la base del árbol.

2.1.1.1.4 Medición de alturas sin determinación de distancia horizontal.

En la medición de alturas puede evitarse la determinación de la distancia entre el observador y el árbol utilizando una vara o pértiga de longitud conocida apoyada contra el tronco o señalando dicha longitud directamente en el árbol (Figura 10).

OAB y Oab ; triángulos semejantes en donde: $\frac{AB}{ab} = \frac{OB}{ob}$

OBD y obd ; triángulos semejantes en donde: $\frac{BD}{bd} = \frac{OB}{ob}$

En las expresiones anteriores los segundos términos son iguales por lo que se puede escribir que:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BD}{bd}$$

Por lo que la altura AB del árbol será igual a:

$$AB = \frac{ab * BD}{bd}$$

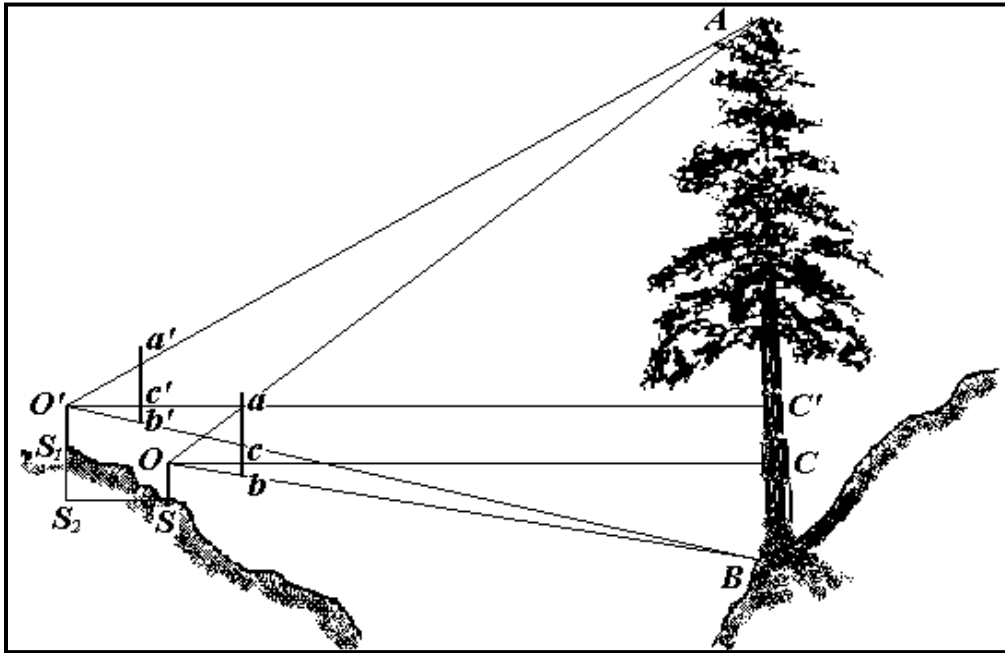


Figura 11. Determinación de la altura cuando el pie del árbol es inaccesible.

Como $O'C' = OC + SS_2$ sustituimos:

$$\frac{OC * ab}{Oc} = \frac{(OC + SS_2) * a' b'}{O' c'}$$

$$OC * ab * O' c' = (OC + SS_2) * a' b' * Oc$$

$$OC * ab * O' c' = (OC * a' b' * Oc) + (SS_2 * a' b' * Oc)$$

$$(OC * ab * O' c') - (OC * a' b' * Oc) = (SS_2 * a' b' * Oc)$$

$$OC * [(ab * O' c') - (a' b' * Oc)] = (SS_2 * a' b' * Oc)$$

$$OC = \frac{SS_2 * a' b' * Oc}{(ab * O' c') - (a' b' * Oc)}$$

Sustituyendo el valor de OC obtenido en la expresión que nos da la altura del árbol:

$$AB = \frac{OC * ab}{Oc}$$

$$AB = \frac{SS_2 * a' b' * Oc * ab}{[(ab * O' c') - (a' b' * Oc)] * Oc}$$

$$AB = \frac{SS_2 * a' b' * ab}{(ab * O' c') - (a' b' * Oc)}$$

2.1.2 Instrumentos Basados en Principios Geométricos.

2.1.2.1 Cruz del hachero.

Este instrumento se basa en triángulos semejantes. Consiste en dos varillas de igual longitud arregladas como lo muestra la **Figura 12**.

Para emplear la cruz del hachero es necesario colocarse a una distancia del árbol aproximadamente igual a la altura del mismo.

El punto **O** es el vértice de generación de los triángulos semejantes, que se coloca en el ojo del observador.

Dirigida la visual con la varilla **Oc** paralela al suelo y manteniendo vertical la **ab**, el observador se aleja o acerca al árbol hasta que las visuales **Oa** y **Ob** pasen por la punta y la base del árbol respectivamente. La distancia **OC** será igual a la altura del árbol **AB**. Las relaciones se muestran en la **Figura 13**.

Con base en los triángulos semejantes **OAB** y **Oab**:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{OC}{Oc}$$

$$AB = \frac{OC * ab}{Oc}$$

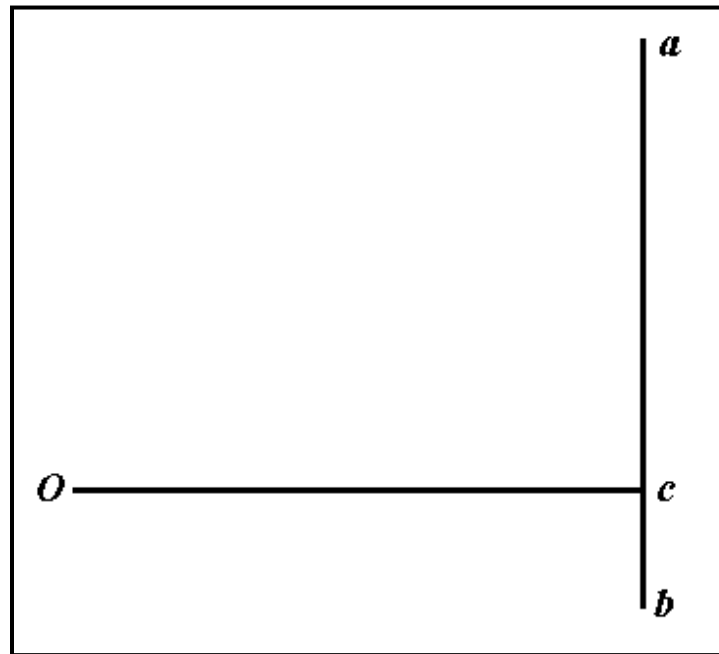


Figura 12. Cruz del hachero.

Como $ab = Oc$

$$\frac{ab}{Oc} = 1 \therefore AB = OC$$

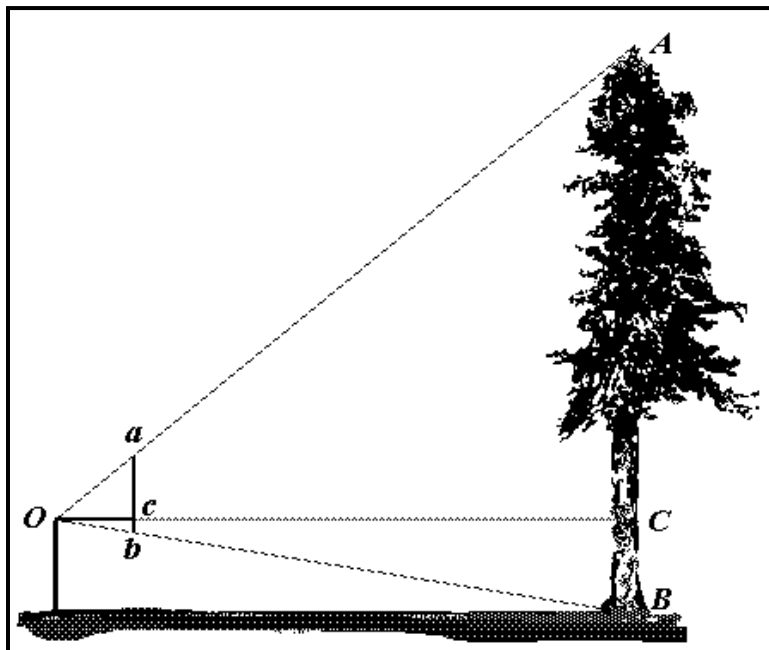


Figura 13. Relaciones de la cruz del hachero y la altura del árbol.

Esto es, la altura del árbol AB es igual a la distancia horizontal del observador al árbol. Bastará entonces medir la distancia OC para determinar la altura del árbol. Este procedimiento lo usan los derribadores para saber el punto de caída del árbol.

2.1.2.2 Escuadra de brazos iguales.

También en un principio geométrico se basa la medición de alturas utilizando una escuadra con ángulos de 45° , la que por construcción tiene ambos catetos de igual longitud, la cual se conoce como escuadra de brazos iguales. Su aplicación se muestra en la **Figura 14**.

En virtud de que los triángulos OAC y Oac son semejantes, podemos escribir:

$$\frac{AC}{ac} = \frac{OC}{Oc}$$

$$AC = \frac{ac * OC}{Oc}$$

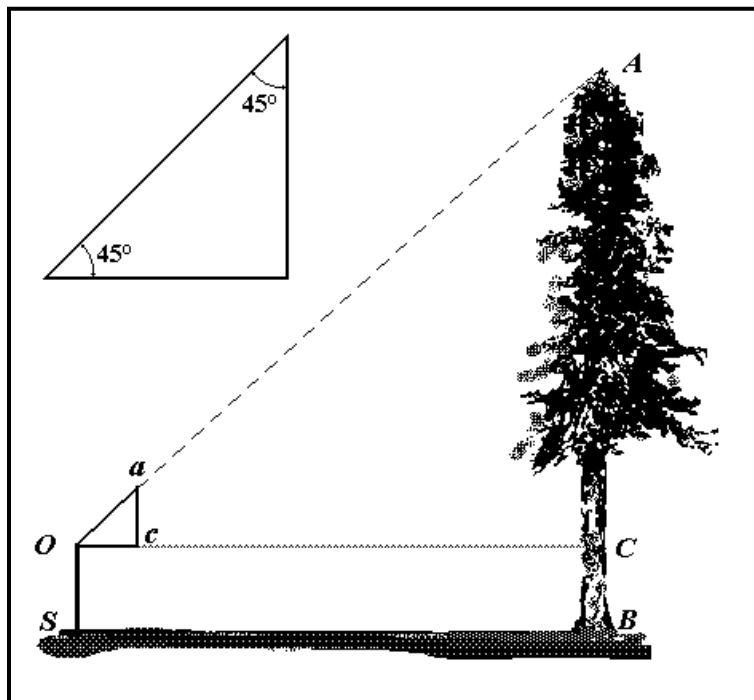


Figura 14. Aplicación de la escuadra de brazos iguales.

Por construcción: $ac = Oc \quad \therefore \frac{ac}{Oc} = 1$

Por lo tanto: $AC = OC$

Por lo anterior, la altura del árbol será: $AB = OC + BC$

En la que, OC es la distancia del observador al árbol y BC igual a OS es la altura de la observación.

Para emplear este método es necesario que el terreno sea plano o que el observador esté ubicado en la misma cota que el árbol, pues en pendiente no siempre es posible lograr la requerida horizontalidad de uno de los catetos de la escuadra y puede ser difícil determinar la altura BC .

2.1.2.3 Hipsómetro de Merrit.

El hipsómetro de Merritt es una regla de madera graduada que nos proporciona la altura de los árboles en número de trozas de longitud comercial; el original se construyó para trozas de 16 pies de longitud. La regla está graduada sobre la base de que debe mantenerse en posición vertical a una distancia fija del pie del árbol y con su extremo inferior a 25 pulgadas del ojo del observador (**Figura 15**).

El inventor de este instrumento tomó como distancia $OB = 66$ pies; el punto O siempre debe estar a 66 pies de la base del árbol y D a 25 pulgadas de O . La consideración de los triángulos semejantes OAB y OCD permite obtener:

$$\frac{AB}{DC} = \frac{OB}{OD} \quad \therefore \quad AB = \frac{OB * DC}{OD}$$

Sustituyendo los valores de OB y OD :

$$AB = \frac{792'' * DC}{25''};$$

Para graduar la regla se despeja de la fórmula anterior el valor DC :

$$DC = \frac{25'' * AB}{792''} = 0.3156 AB$$

En esta forma, si se dan valores a **AB** que corresponden a 1, 2, 3, etc. trozas de longitud estándar, se obtendrán valores para **DC** que son los que se marcan en el hipsómetro. Si por ejemplo los valores deseados son para altura en trozas de 16 pies de longitud, sustituimos el valor de AB y multiplicamos por 12 para convertir a pulgadas el valor obtenido:

$$DC = 0.3156 * 16' * 12$$

$$DC = 6.06'' ;$$

Si la troza escogida es de 16 pies, cada división del hipsómetro tendrá 6.06 pulgadas.

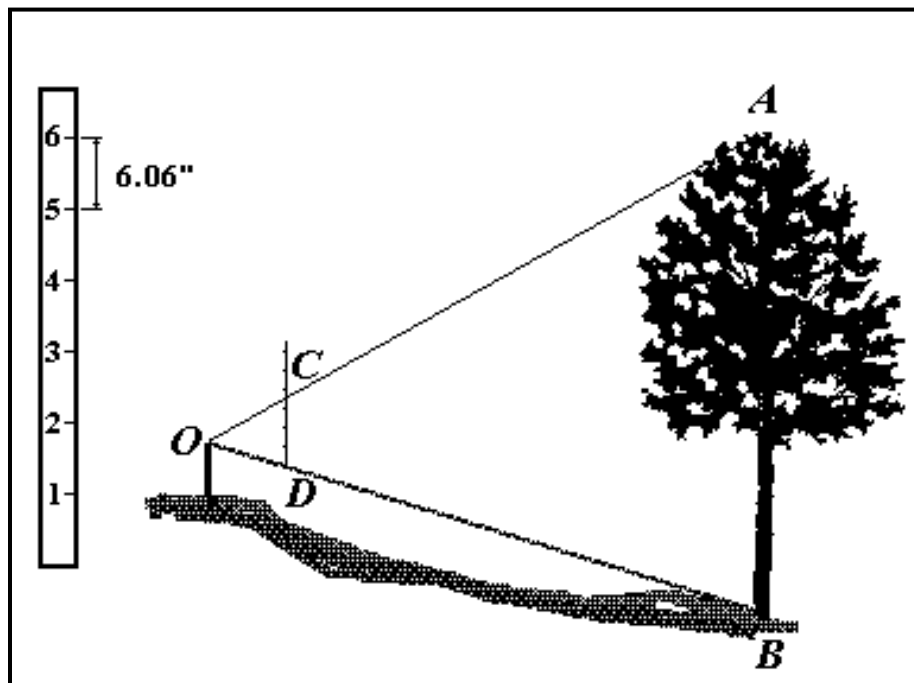


Figura 15. Utilización del hipsómetro del Merritt para alturas en número de trozas de 16 pies de longitud.

Ventajas:

- 🌲 Instrumento ligero, cómodo y fácil de transportar.
- 🌲 Se puede combinar con la regla Biltmore que se tratará en la medición de diámetros.
- 🌲 Permite operar con rapidez.

Desventajas:

- 🌳 Es uno de los menos exactos ya que pequeños errores en su uso dan lugar a errores importantes.
- 🌳 El árbol debe estar vertical y en el mismo plano que el hipsómetro.
- 🌳 Sólo es útil para determinar alturas comerciales expresadas en trozas de longitud estándar.

2.1.2.4 Bastón hipsométrico.

Consiste en un bastón o regla de aproximadamente 1 m de longitud que está graduado en porciones de igual longitud y para su uso es necesario contar con una pértiga auxiliar de longitud determinada que puede ser 2 ó 3 m, la cual se marca en el tronco del árbol a partir de la base. El operador debe colocarse a una distancia más o menos igual a la altura del árbol (**Figura 16**).

Visuales:

OB pasando por el cero de la regla o bastón.

OD hacia la altura marcada en el árbol, la cual debe coincidir con la división 3 de la regla, si la longitud auxiliar es de 3 m.

OA hacia la cima del árbol; la división “*a*” será la altura.

OAB y **Oab** triángulos semejantes en donde:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{OB}{ob}$$

ODB y **Odb** triángulos semejantes en donde:

$$\frac{DB}{db} = \frac{OB}{ob}$$

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BD}{bd} \quad \therefore \quad AB = \frac{ab * BD}{bd}$$

Como **BD** es igual a **bd** en valor absoluto:

AB = ab, también en valor absoluto

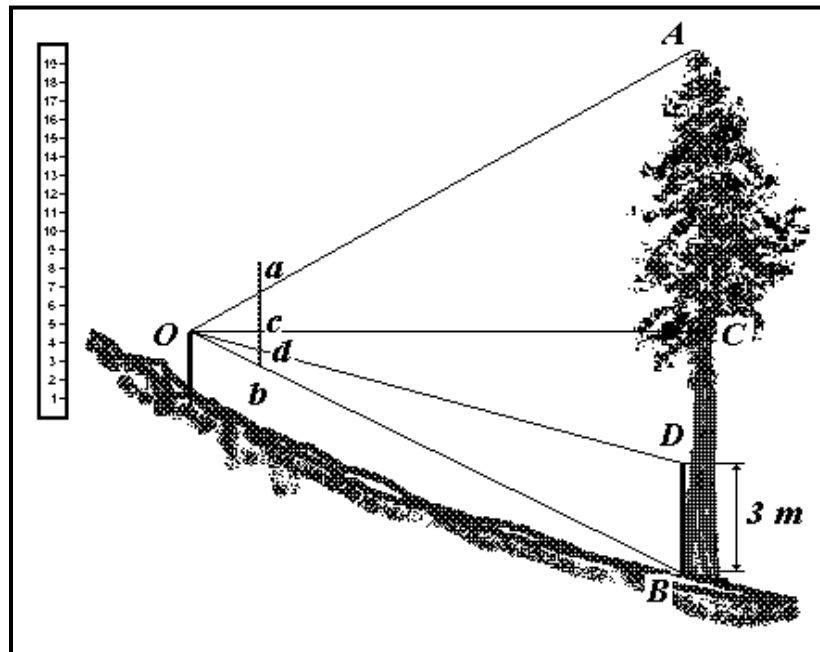


Figura 16. Fundamento y utilización del bastón hipsométrico.

2.1.2.5 Hipsómetro de Christen.

Se compone de una regla metálica o de cualquier material rígido de 33 cm de longitud que lleva en sus extremos dos bordes sobresalientes con un pequeño orificio en la parte superior que permite tenerlo suspendido entre los dedos al usarlo. En la parte central posee una canaladura de 30 cm de longitud. En su empleo se usa un elemento auxiliar que puede ser una vara o pértiga de longitud conocida (4 m en el original) que se apoya contra el tronco del árbol (Figura 17).

Una vez colocada la vara o pértiga en el lugar indicado, el operador se aleja hasta una distancia más o menos igual a la altura del árbol y suspende verticalmente el aparato dirigiendo simultáneamente dos visuales a través de las aristas interiores de los bordes sobresalientes del instrumento, las cuales deben pasar respectivamente por la cima y la base del árbol. Para lograrlo se alarga o acorta el brazo y se eleva o baja el instrumento. Una vez logrado, se dirige una tercera visual al extremo superior de la pértiga y se lee en el hipsómetro la graduación (*d*) en que dicha visual lo corta, la cual corresponderá a la altura.

La altura se obtiene por la relación siguiente:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BD}{bd}$$

$$AB = \frac{BD * ab}{bd}$$

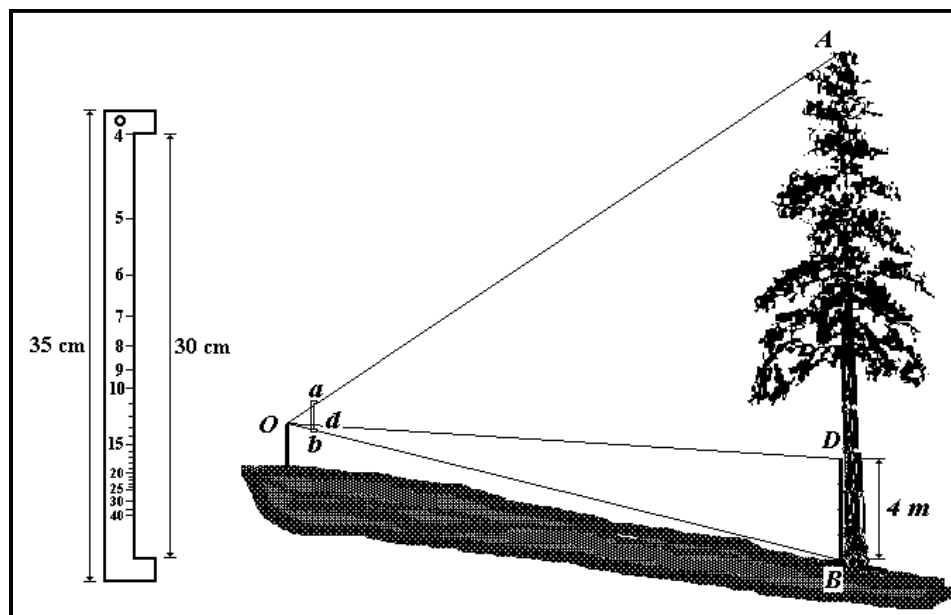


Figura 17. Utilización del Hipsómetro de Christen para la determinación de alturas.

Sustituyendo los valores de la longitud de la canaladura del hipsómetro y de la regla auxiliar:

$$AB = \frac{4 * 0.30}{bd}$$

Para graduar el aparato se opera de la siguiente manera:

$$bd = \frac{BD * ab}{AB} = \frac{4 * 0.30}{AB}$$

Dando valores enteros y variables de metro en metro a AB , se obtienen valores para bd que son los que se graban en la regla.

Ventajas:

- 🌲 Ligero, fácil de construir y permite operar con rapidez
- 🌲 Proporciona resultados de mediana exactitud.
- 🌲 La altura del árbol se obtiene con una sola lectura.

🌲 No hay necesidad de medir la distancia entre árbol y observador.

Desventajas:

🌲 Se requiere un cuidado adicional para conservar la imagen del árbol dentro de la canaladura, mientras se mira el extremo superior de la pértiga.

🌲 El árbol debe ser derecho y estar en plano vertical.

🌲 El hipsómetro debe estar en plano vertical suspendiéndosele como si fuera una plomada.

🌲 Para alturas mayores de 35 m es difícil graduar la escala y la precisión se reduce.

🌲 Requiere cierta pericia.

A pesar de sus inconvenientes, el hipsómetro de Christen es uno de los más recomendables para la medición de alturas de árboles en pie, especialmente en estimaciones comerciales.

2.1.3 Métodos Trigonométricos.

Cualquier aparato que permita medir ángulos verticales o pendientes puede ser usado como hipsómetro mediante la aplicación de principios trigonométricos. Por tal motivo se revisará el principio y posteriormente los aparatos usados en la medición de alturas.

2.1.3.1 Pie del árbol accesible.

2.1.3.1.1 Visual horizontal del observador entre la punta y la base del árbol.

El caso más frecuente en la determinación de altura de árboles es aquél en el que el árbol es accesible al interesado, se puede determinar la distancia horizontal existente entre un punto de observación y el árbol y la visual horizontal del operador, dirigida al espécimen a medir, toca un punto entre la punta y la base de éste, además de que, desde el punto de observación puede lanzar visuales a esos extremos.

En la **Figura 18** se tiene, en **O**, un operador u observador provisto de un instrumento que nos permite medir ángulos verticales. Con él se determinan los ángulos de inclinación de las visuales a la punta y a la base del árbol y con un

longímetro o más fácilmente con una cuerda compensada, se determina la distancia entre el árbol y el punto de observación O .

En la **Figura 18** y en las figuras siguientes se tendrá, a menos que se especifique otra cosa, que:

OA y OB = Visuales a la punta y a la base del árbol.

OC = Distancia horizontal entre el ojo del observador y el árbol. Línea de referencia para la medición de los ángulos verticales.

α y β = Ángulos verticales.

De acuerdo a la **Figura 18**, la altura del árbol será: $h = AB = AC + BC$

En el triángulo rectángulo OAC se tiene que la tangente del ángulo de inclinación de la visual a la punta del árbol es:

$$\tan \alpha = \frac{AC}{OC} \quad \therefore \quad AC = OC * \tan \alpha$$

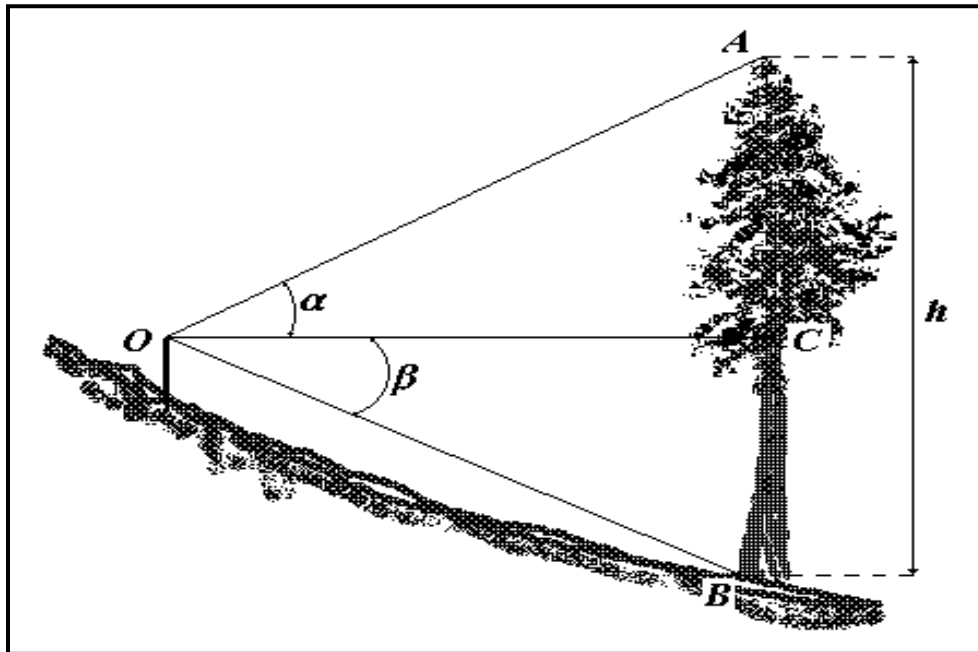


Figura 18. Visual horizontal del observador entre la punta y la base del árbol.

Asimismo, en el triángulo rectángulo OBC la tangente del ángulo de inclinación de la visual a la base del árbol es igual a:

$$\tan \beta = \frac{BC}{OC} \quad \therefore \quad BC = OC * \tan \beta$$

$$AB = (OC * \tan \alpha) + (OC * \tan \beta) = OC * (\tan \alpha + \tan \beta)$$

De esta manera la altura total es igual a la suma de las tangentes de los ángulos de inclinación de las visuales a la punta y a la base, multiplicada por la distancia horizontal entre el observador y el árbol.

$$AB = OC * (\tan \alpha + \tan \beta)$$

2.1.3.1.2 Visual horizontal del observador arriba de la punta del árbol.

Puede darse el caso de que la visual horizontal del observador al árbol no toque a éste sino que pase por arriba de su punta (Figura 19); en este caso, la altura del árbol será igual a:

$$h = AB = CB - AC$$

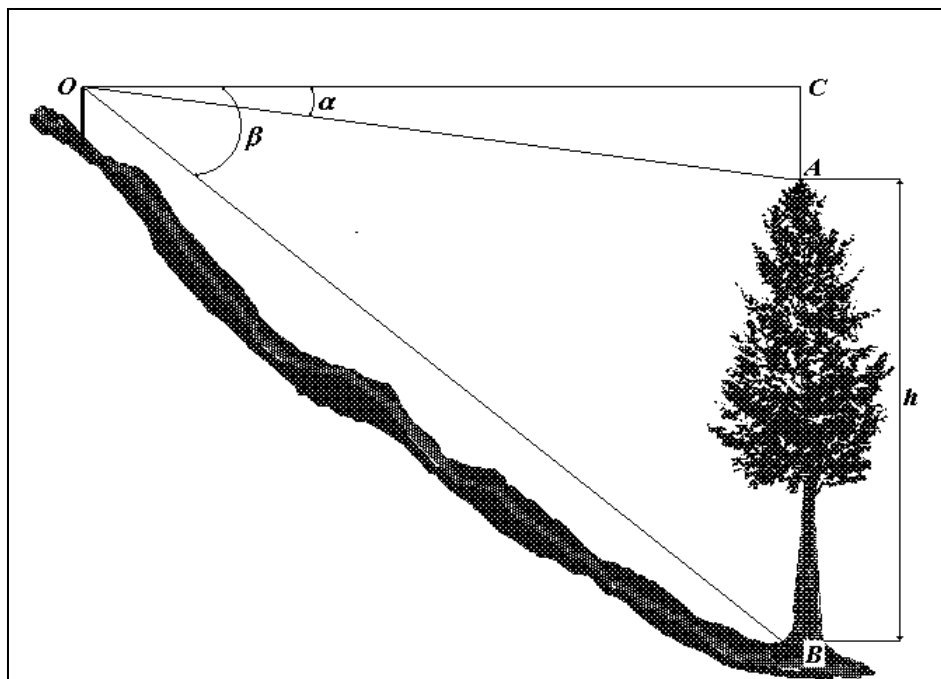


Figura 19. Visual horizontal del observador arriba de la punta del árbol.

En el triángulo rectángulo OAC la tangente del ángulo de inclinación de la visual a la punta del árbol es:

$$\tan \alpha = \frac{AC}{OC} \quad \therefore \quad AC = OC * \tan \alpha$$

Asimismo, en el triángulo rectángulo OBC la tangente del ángulo de inclinación de la visual a la base del árbol es igual a:

$$\tan \beta = \frac{BC}{OC} \quad \therefore \quad BC = OC * \tan \beta$$

La diferencia entre las magnitudes BC y AC nos da el valor de AB :

$$AB = OC * \tan \beta - OC * \tan \alpha = OC(\tan \beta - \tan \alpha)$$

De esta manera la altura total es igual a la resta de las tangentes de los ángulos de inclinación de las visuales a la base y a la punta, multiplicada por la distancia horizontal entre el observador y el árbol.

2.1.3.1.3 Visual horizontal del observador abajo de la base del árbol.

Un tercer caso, factible en terrenos con pendiente, como suele ser frecuente en las zonas forestales, es que la visual horizontal del observador pase por abajo de la base del árbol (**Figura 20**). En esta situación, la altura AB del árbol será igual a:

$$h = AB = CB - AC$$

En el triángulo rectángulo OAC la tangente del ángulo de inclinación de la visual a la punta del árbol es:

$$\tan \alpha = \frac{AC}{OC} \quad \therefore \quad AC = OC * \tan \alpha$$

En el triángulo rectángulo OBC la tangente del ángulo de inclinación de la visual a la base del árbol es igual a:

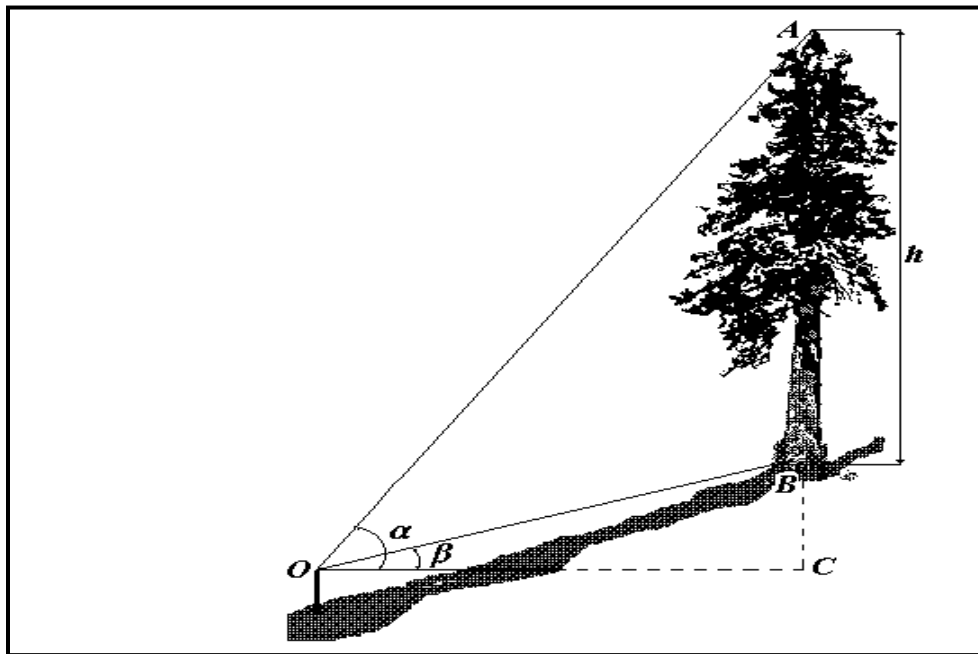


Figura 20. Visual horizontal del observador abajo de la base del árbol.

$$\tan \beta = \frac{BC}{OC} \quad \therefore \quad BC = OC * \tan \beta$$

La diferencia entre las magnitudes AC y BC nos da el valor de AB :

$$AB = (OC * \tan \alpha) - (OC * \tan \beta) = OC * (\tan \alpha - \tan \beta)$$

En esta situación, la altura total es igual a la resta de las tangentes de los ángulos de inclinación de las visuales a la punta y a la base, multiplicada por la distancia horizontal entre el observador y el árbol.

2.1.3.1.4 Medición de alturas sin determinación de distancia horizontal.

En algunos casos, la distancia entre observador y árbol no se puede o no se quiere medir. Dicha distancia puede calcularse trigonométricamente utilizando una altura auxiliar para después proceder como en los casos anteriores, según la posición de la visual horizontal del observador respecto al árbol.

Para la determinación de la distancia horizontal OC , se marca sobre el fuste del árbol una altura determinada o bien se coloca sobre él una vara o pértiga de longitud conocida a la que denominaremos BD (Figura 21). En esa condición,

lanzamos visuales al punto *D* y a la base del árbol y obtenemos las tangentes de sus ángulos de inclinación de tal forma que podemos escribir que:

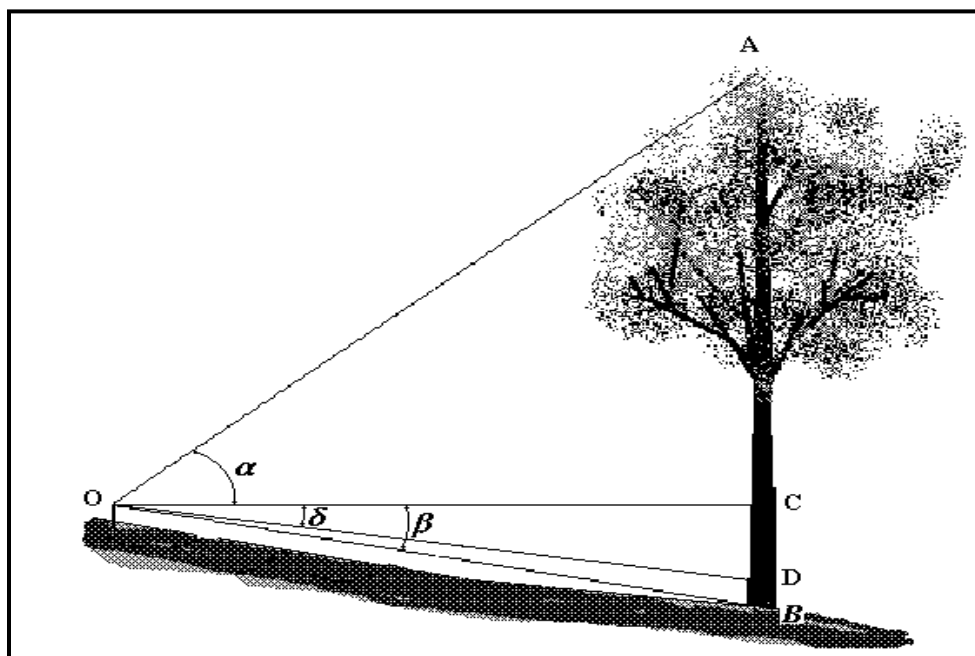


Figura 21. Elementos para determinación de alturas sin determinación de distancia horizontal.

$$BC = OC * \text{Tan}\beta$$

$$CD = OC * \text{Tan}\alpha$$

En esa condición, tendremos que la magnitud auxiliar puede ser definida en términos de las 2 alturas que hemos determinado:

$$BD = BC - CD$$

$$BD = (OC * \text{Tan}\beta) - (OC * \text{Tan}\alpha) = OC * (\text{Tan}\beta - \text{Tan}\alpha)$$

De esta manera, la distancia horizontal entre observador y árbol determinada con ayuda de una distancia vertical conocida será igual a:

$$OC = \frac{BD}{\text{Tan}\beta - \text{Tan}\alpha}$$

Determinada la distancia horizontal OC , la altura del árbol podrá ser determinada con las expresiones vistas anteriormente, tomando en cuenta la posición de la visual horizontal del observador respecto al árbol.

2.1.3.2 Pie del árbol inaccesible.

Una situación que puede presentarse debido a lo quebrado y accidentado de los terrenos forestales, a la existencia de cañadas o depresiones, es que un árbol del cual se requiere la determinación de su altura se encuentre en una situación de inaccesibilidad al operador no pudiéndose por esta razón acercarse a él y determinar la distancia horizontal (**Figura 22**). En la mayor parte de los casos la altura de un árbol en esta condición no se determina o bien se estima a ojo.

Cuando es indispensable la medición de la altura, la distancia horizontal puede obtenerse indirectamente. Para ello se determinan las tangentes de los ángulos de inclinación desde un punto S , siendo la altura del árbol, como se ha visto, igual a:

$$AB = OC * (\tan \alpha + \tan \beta)$$

Asimismo, haciendo estación en el punto S_1 , se miden desde él las tangentes de los ángulos de inclinación de las visuales a la punta y a la base, con los cuales la altura del árbol sería:

$$AB = O'C' * (\tan \alpha' + \tan \beta')$$

Como en ambas expresiones obtenemos el valor de la altura del árbol AB , podemos igualar sus segundas partes:

$$OC * (\tan \alpha + \tan \beta) = O'C' * (\tan \alpha' + \tan \beta')$$

Determinado el valor de la distancia horizontal entre S y S_1 o sea el valor de SS_2 , podemos escribir la siguiente igualdad:

$$O'C' = OC + SS_2$$

Sustituyendo en la anterior expresión el valor de $O'C'$ dado por ésta, tendremos:

$$OC * (\tan \alpha + \tan \beta) = (OC + SS_2) * (\tan \alpha' + \tan \beta')$$

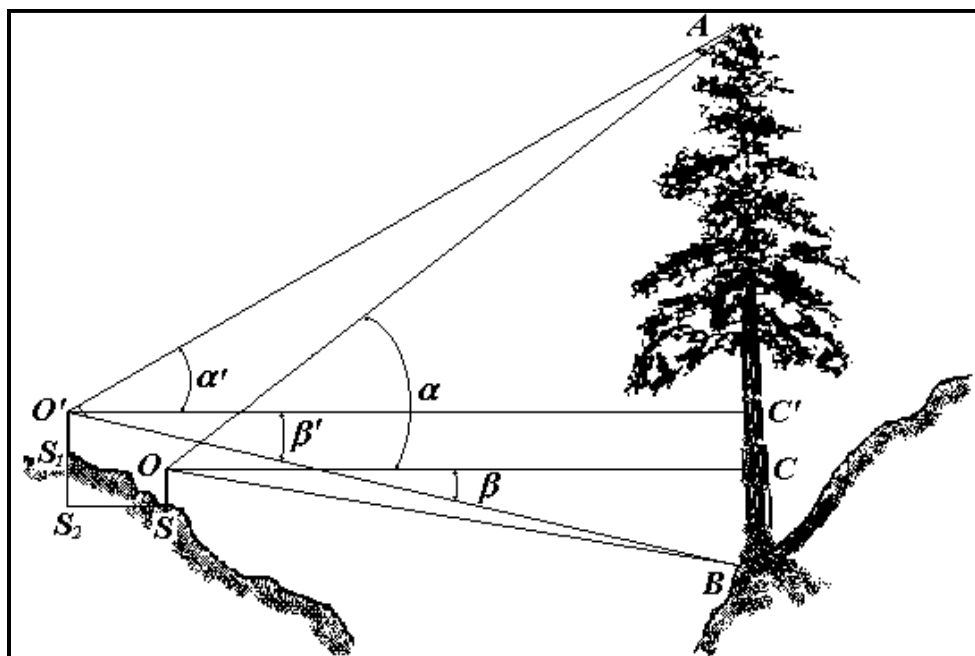


Figura 22. Pie del árbol inaccesible.

Efectuando los productos de OC en los dos términos de la igualdad, pasándolos a un mismo lado del signo igual y sacando a OC como factor común, tendremos:

$$OC \tan \alpha + OC \tan \beta = OC \tan \alpha' + OC \tan \beta' + [SS_2 * (\tan \alpha' + \tan \beta')]$$

$$OC \tan \alpha + OC \tan \beta - OC \tan \alpha' - OC \tan \beta' = SS_2 * (\tan \alpha' + \tan \beta')$$

$$OC * (\tan \alpha + \tan \beta - \tan \alpha' - \tan \beta') = SS_2 * (\tan \alpha' + \tan \beta')$$

Despejando el valor de la distancia horizontal OC , tendremos que ésta es igual a:

$$OC = \frac{SS_2 * (\tan \alpha' + \tan \beta')}{(\tan \alpha + \tan \beta - \tan \alpha' - \tan \beta')}$$

Sustituyendo el valor de OC , calculado indirectamente, en la expresión que nos da el valor de la altura AB , tendremos finalmente que ésta es igual a:

$$AB = \frac{SS_2 * (\tan \alpha + \tan \beta) * (\tan \alpha' + \tan \beta')}{(\tan \alpha + \tan \beta - \tan \alpha' - \tan \beta')}$$

2.1.4 Instrumentos para Medir Ángulos Verticales.

De las medidas que deben tomarse para la determinación de alturas, la distancia horizontal se determina fácilmente con una cuerda compensada o con cualquier longímetro, a condición de que realmente sea la medición horizontal.

Para la determinación de la magnitud de los ángulos verticales se requiere necesariamente la fijación de una base o línea horizontal de referencia a partir de la cual se generen y midan éstos. Para lograr lo anterior, los instrumentos que se han construido para la medición de ángulos verticales y para la determinación de alturas, utilizan uno de los siguientes procedimientos:

- 🚧 Fijación de la horizontal mediante un nivel de burbuja y la construcción de un índice perpendicular al nivel y por ende vertical, cuando éste se encuentra horizontal.
- 🚧 Fijación de una vertical mediante la utilización de una plomada, de un índice pendular o de un disco pendular, a los cuales por construcción se les fija una perpendicular, la cual será la referencia horizontal.

2.1.4.1 Fijación de la horizontal mediante un nivel de burbuja.

En este procedimiento, a un semicírculo graduado en el cual el diámetro que lo limita sirve como línea de mira, se le fija a éste, en el centro, posibilitando que gire en él, una varilla metálica provista en su parte superior de un nivel de burbuja, de tal modo que cuando la varilla está vertical pasa por el cero del semicírculo, y la línea de mira queda horizontal y paralela al nivel de burbuja; la varilla vertical sirve de índice.

Cuando se desea determinar un ángulo vertical, se lanza una visual al punto de interés utilizando la línea de mira (**Figura 23**); dada esta situación, se hace girar la varilla hasta que el nivel de burbuja queda horizontal, quedando definido en el semicírculo graduado mediante la varilla vertical el ángulo α ; este ángulo es igual al ángulo α' , que es el que se desea determinar.

2.1.4.2 Fijación de la horizontal utilizando una plomada.

El otro procedimiento que se ha utilizado para la fijación de una base o línea horizontal a partir de la cual se miden los ángulos verticales, es la utilización de una plomada, la cual se fija en el centro de un semicírculo graduado. Por construcción, se hace que el cero de la graduación se encuentre en dirección al radio perpendicular al diámetro que limita el semicírculo; cuando la plomada coincide con el cero, ese diámetro, que nos servirá para generar la línea de mira, se encontrará en posición horizontal.

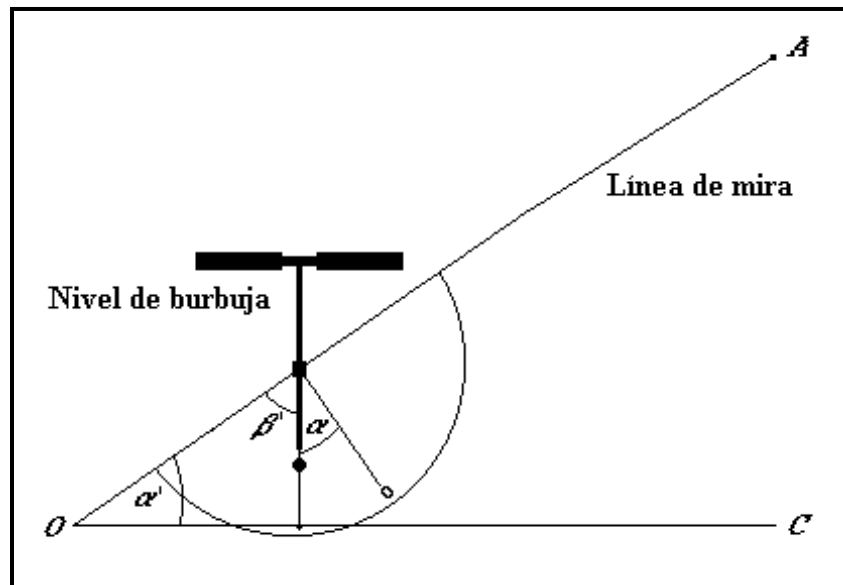


Figura 23. Determinación de ángulos verticales mediante la fijación de una línea horizontal con un nivel de burbuja.

Para determinar un ángulo vertical, se lanza una visual utilizando la línea de mira OA (Figura 24). Al inclinarse la línea de mira, la plomada mantiene la vertical y define, junto con el punto cero de la graduación la magnitud del ángulo α que es igual al ángulo vertical α' que se desea determinar, ya que ambos, α y α' son complementarios del ángulo β' .

Un sistema adicional a los anteriores, es la utilización de un disco pendular el cual tiene grabados en su canto magnitudes de ángulos, de pendientes o de alturas.

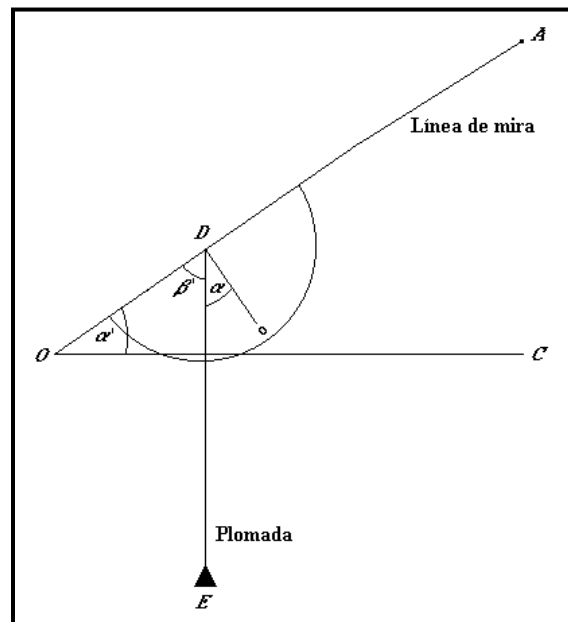


Figura 24. Determinación de ángulos verticales mediante la fijación de una línea horizontal con una plomada.

2.1.5 Instrumentos para Medir Alturas Basados en Principios Trigonómicos.

2.1.5.1 Plancheta hipsométrica.

Es un instrumento que consiste en una pieza rectangular de madera o triplay en el cual, de manera inicial, se dibuja en su parte central un semicírculo en el que se graban utilizando un transportador, magnitudes de ángulos a partir del centro y hacia derecha e izquierda, con la mayor aproximación posible, de tal forma que si se hace pender una plomada del centro del semicírculo, ésta pase por el cero de la graduación. Realizado esto, se tendrá un instrumento que nos permite medir ángulos verticales en grados, a partir de la horizontal, que servirá como base para la construcción de una plancheta hipsométrica (**Figura 25**).

Como para la determinación de alturas se requiere la tangente del ángulo de inclinación, una opción adicional para no tener que recurrir a tablas o a calculadora, es la de grabar en la misma plancheta, en un semicírculo concéntrico al primero, valores de esta función o valores de pendiente, los cuales son iguales a la tangente multiplicada por cien y expresada en porcentaje. Para ello se calcula el valor de los ángulos en grados que correspondan a pendientes de cinco en cinco por ciento (**Figura 26**), y se graban los valores de éstas en dirección al centro del semicírculo y del valor del ángulo calculado.

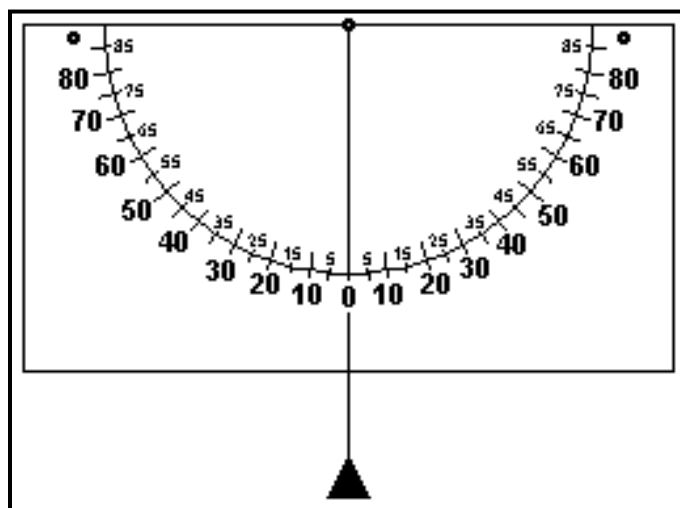


Figura 25. Base para la construcción de una plancheta hipsométrica utilizando un transportador de ángulos y un índice pendular.

Se ha visto que para obtener la altura de un árbol basta multiplicar la distancia horizontal a que se encuentra el operador por la suma o resta de las tangentes de los ángulos (o de las pendientes divididas entre cien), a la punta y a la base del árbol, lo cual, obviamente, requiere la realización de algunos cálculos.

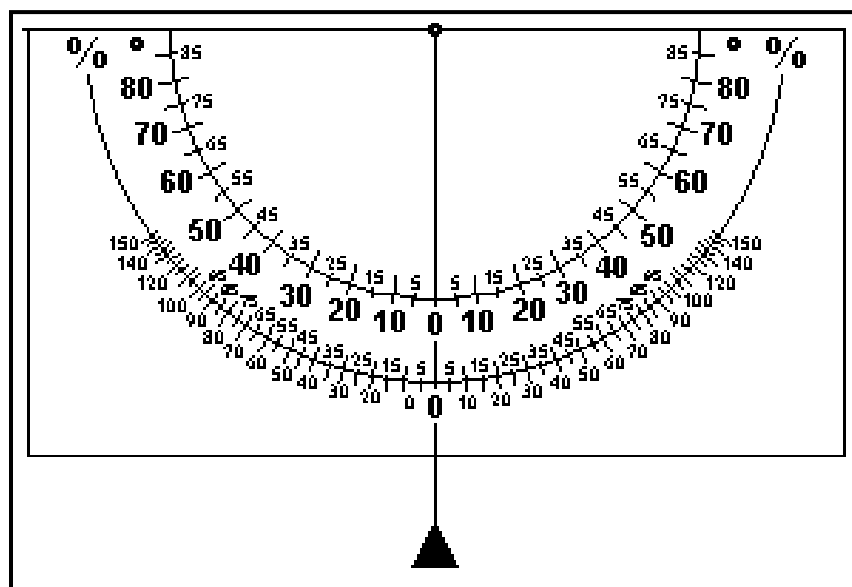


Figura 26. Plancheta hipsométrica con escalas en grados y en porcentajes de pendiente.

Una opción adicional que se ha incluido en la mayor parte de los instrumentos para la determinación de alturas de árboles es que ésta se obtenga mediante una sencilla suma o resta de alturas ya dadas en metros. Para lograr esto

se requiere que el operador se ubique a una distancia horizontal fija, la cual tendrá su propia escala en forma de círculo concéntrico a los primeros, la cual se genera con el producto de la distancia horizontal por la pendiente dividida entre 100 (**Figura 27**). Así, para ubicar el punto en que deberá quedar la altura de por ejemplo 5 metros en la nueva escala, se realiza el siguiente cálculo:

$$h = OC * \tan \alpha \quad \text{Si } h = 5 \text{ m y la distancia horizontal } OC = 20 \text{ m}$$

$$5 = 20 * \tan \alpha \quad \tan \alpha = \frac{5}{20} = 0.25 \quad \text{y} \quad m = 25\%$$

Por lo que la altura de 5 m estará en dirección a la pendiente de 25%

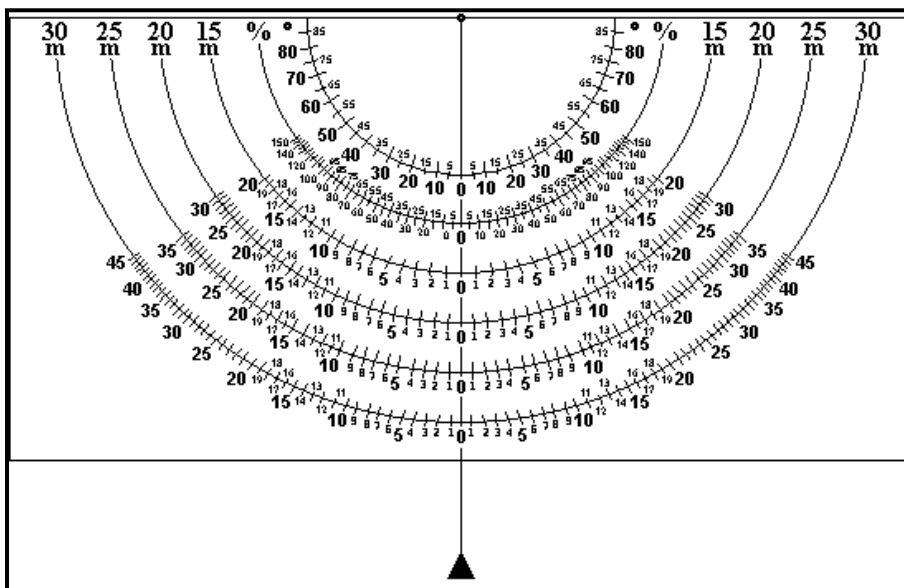


Figura 27. Plancheta hipsométrica con escalas en grados, en porcentajes de pendiente y para alturas a 15, 20, 25 y 30 m de distancia horizontal.

2.1.5.2 Clisímetro o nivel de Abney.

Es un aparato usado en la medición de la altura de árboles, aunque no ha sido diseñado exclusivamente para ese fin (**Figuras 28 y 29**). Tiene un pequeño tubo de sección transversal cuadrada, aproximadamente de 10 cm de longitud con el que se toma una línea de mira. Sujeto a él, hay un nivel de burbuja de aire que se hace girar mientras se toma la línea de mira. Un pequeño espejo dentro del tubo permite observar cuando el nivel queda en posición horizontal. El instrumento se aparta entonces del ojo, y el ángulo entre el nivel de burbuja de aire y el tubo de mira se lee en un cuadrante semicircular.

Si el cuadrante está dividido en grados, la lectura se transforma en tangente natural usando tablas trigonométricas o calculadoras portátiles y se aplican los procedimientos descritos con anterioridad. Sin embargo, un perfeccionamiento evidente consiste en dividir el cuadrante en porcentajes de pendiente que son equivalentes a tangentes naturales y se evita el uso de tablas o calculadoras. Solamente se suman o restan, según sea el caso, dos lecturas; las que se multiplican por la distancia horizontal al árbol. Deben separarse dos cifras decimales porque las lecturas son en porcentajes de pendiente.

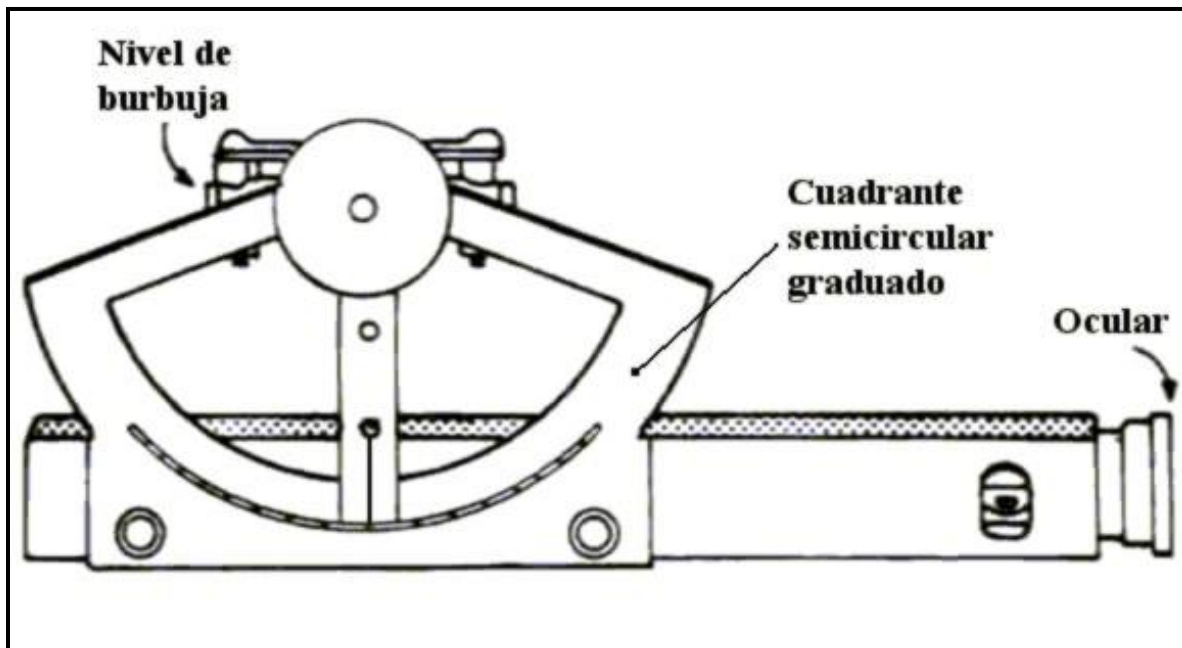


Figura 28. Elementos del clisímetro o nivel de Abney.

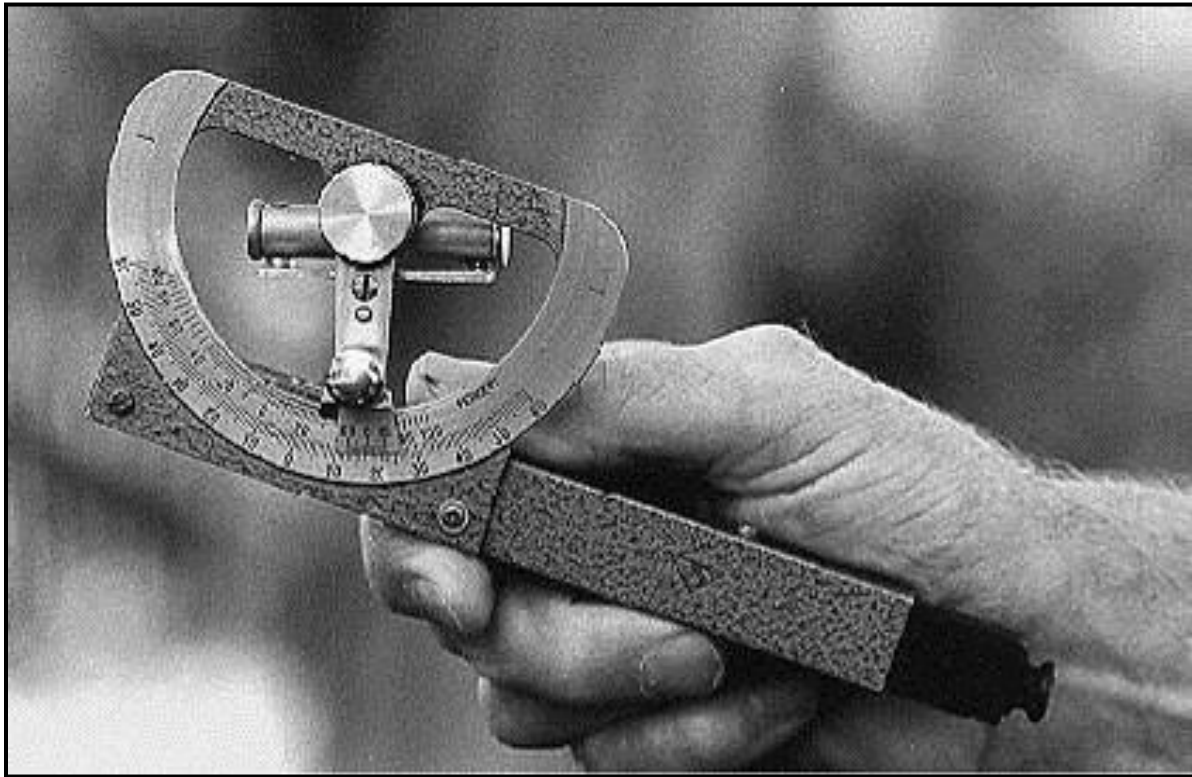


Figura 29. Clisímetro o nivel de Abney.

2.1.5.3 Clinómetro Suunto.

Este aparato está diseñado casi exclusivamente para medir altura de árboles. En él se ha sustituido el nivel de burbuja por un disco pendular el cual tiene un péndulo fijo a 90° de la horizontal. Consiste en una caja metálica que tiene en su interior un disco móvil suspendido por un eje central. La caja tiene un orificio por el que se puede observar la periferia del disco, la cual está dividida en grados, en la escala izquierda, y en porcentajes de pendiente en la escala derecha. (**Figuras 30 y 31**).

Para tomar mediciones con este aparato se acerca el orificio de la caja al ojo derecho y con el izquierdo se visa la punta y la base del árbol. El orificio de la caja tiene una línea horizontal que es el índice con el cual se debe tomar la lectura.

De la misma manera que en el caso del clisímetro, en el caso del Clinómetro Suunto normal, si las lecturas se hacen en grados, habrá que usar tablas de funciones naturales o calculadora y si se usa la escala de porcentajes de pendiente la determinación de la altura se realiza como se describió para el nivel Abney.

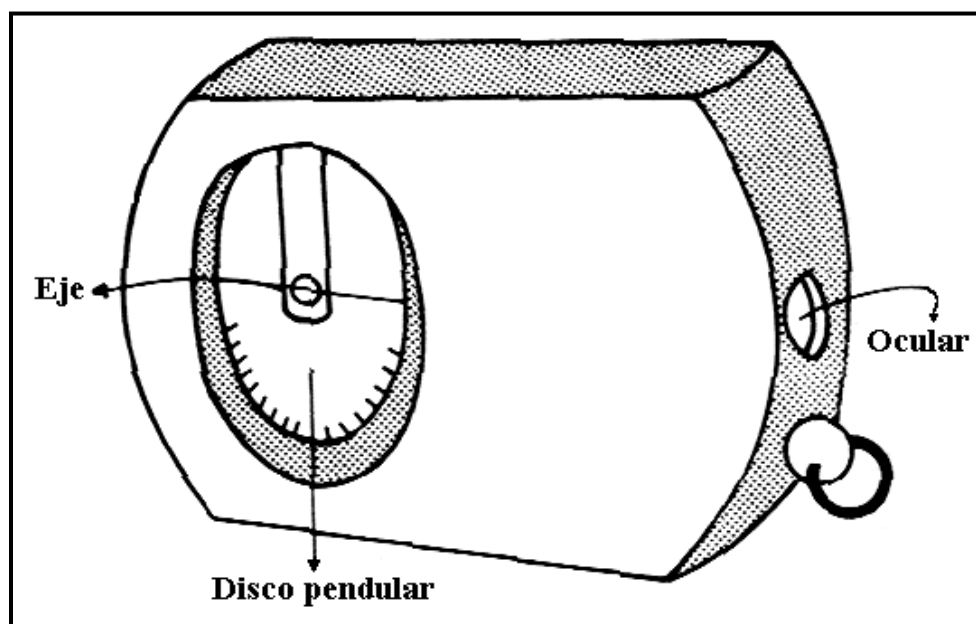


Figura 30. Elementos del Clinómetro Suunto.

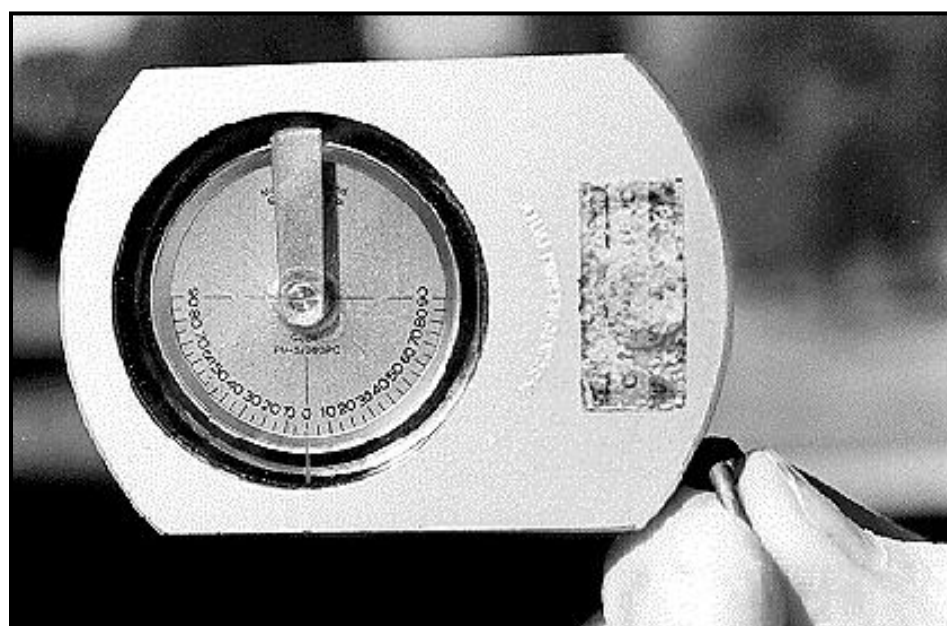


Figura 31. Clinómetro Suunto.

El clinómetro Suunto tiene varios modelos y uno de ellos es el conocido como Clinómetro Suunto 15-20 en el cual se ha establecido la graduación del disco pendular en productos de distancias constantes por la tangente del ángulo de inclinación. Para este modelo de clinómetro se establecieron distancias horizontales constantes del árbol al operador de 15 m y de 20 m. Al introducir la distancia constante se leen en el disco pendular directamente las alturas y los

cálculos se reducen a una simple suma o resta de las lecturas a la punta y a la base del árbol, ya que una altura parcial será igual a:

$$h_1 = 15 m * \text{Tan } \alpha \quad \text{o} \quad h_1 = 20 m * \text{Tan } \alpha$$

De esta manera la altura sólo depende de una variable, o sea el ángulo vertical. Esto permite que por construcción, el valor de la tangente se transforme llanamente en valor de la altura y la lectura sea directamente la altura de la horizontal al punto observado.

En la periferia del disco, la escala de la izquierda corresponde a la distancia de 15 m y la escala de la derecha a 20 m de distancia horizontal; obviamente, cada escala deberá usarse estando a la distancia del árbol correspondiente a la escala.

2.1.5.4 Hipsómetro Blume-Leiss.

Es un clinómetro basado en principios trigonométricos. Es recomendable por su cómodo empleo y apreciable exactitud. Consta de cuatro escalas en metros, similares a las del Suunto 15-20, correspondientes a las distancias horizontales de 15, 20, 30 y 40 m y una quinta escala en grados. Una aguja pendular que se fija en el momento de la puntería y se suelta para una nueva medición, dicha aguja da la altura en metros sobre las escalas indicadas. Para traslado debe estar fija la aguja. Para medir la distancia al árbol dispone de un visor dióptrico y de una regla plegable (**Figuras 32 y 33**).

En la práctica se escoge una distancia aproximadamente igual a la altura estimada del árbol y esa distancia se fija usando el visor dióptrico y la regla plegable la distancia horizontal a la que se desea hacer la determinación.

Por ejemplo, para ubicarse a 15 m de distancia, es necesario ver la regla plegable, extendida, a través del visor dióptrico y retirarse hasta que se sobrepongan las marcas 0 y 15 que aparecen en la regla, la cual deberá estar apoyada verticalmente sobre el árbol. A continuación se apunta sucesivamente a la punta y al pie del árbol, haciendo las lecturas respectivas sobre la escala correspondiente a la distancia elegida. Si las lecturas corresponden a diferentes lados del cero de la escala se suman para obtener la altura total del árbol. Si corresponden al mismo lado se restan, esto último suele ocurrir en terrenos con pendiente.

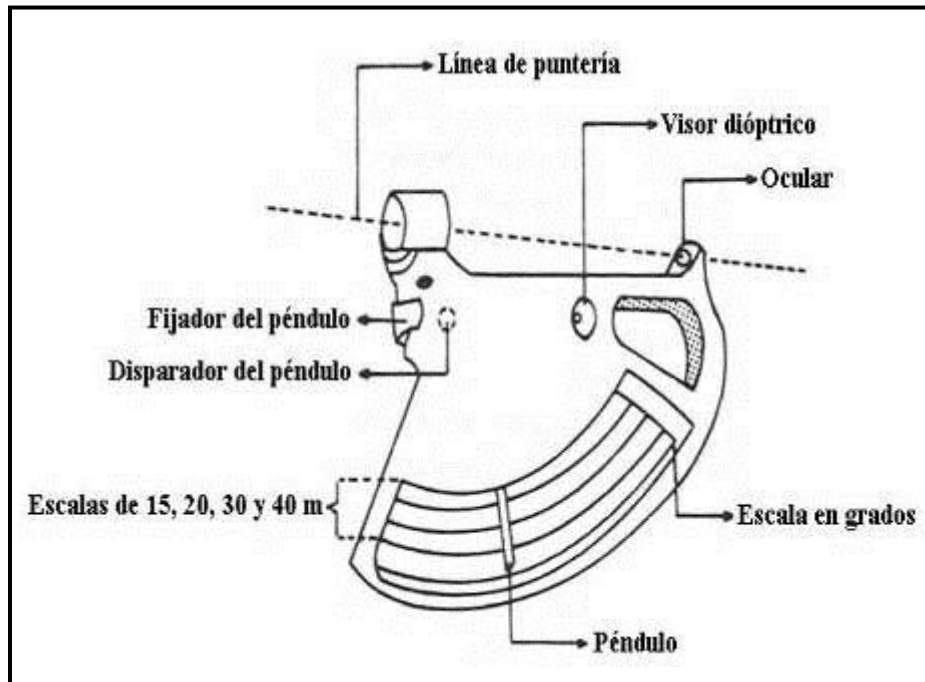


Figura 32. Elementos del hipsómetro Blume-Leiss.

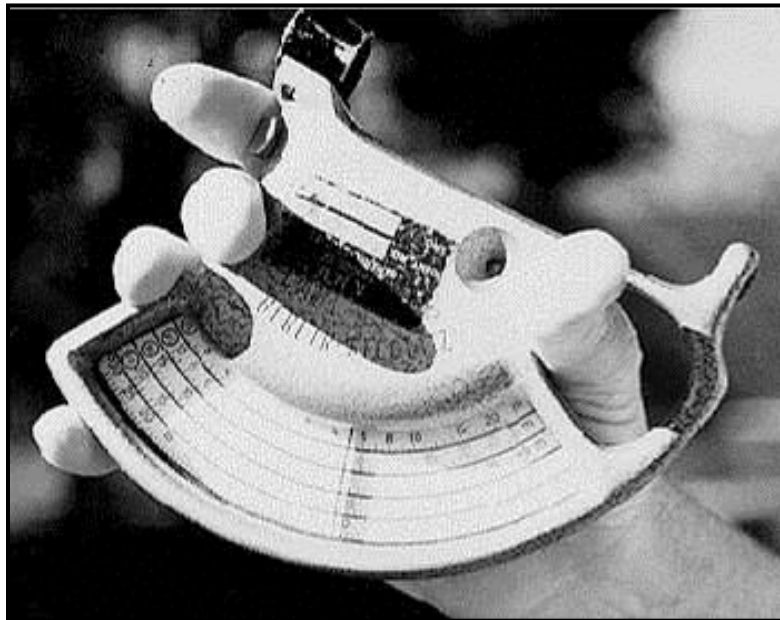


Figura 33. Hipsómetro Blume-Leiss.

Se recomienda establecer la distancia mediante el visor dióptrico (telémetro) en forma horizontal, ya que de otra manera siempre se estará sobrestimando la altura.

Cuando llegara a ser inevitable, se puede establecer la distancia inclinada mediante el telémetro, pero las lecturas habrán de corregirse usando la tabla que lleva grabada el aparato, restando a cada lectura los metros correspondientes al ángulo de inclinación, que tiene anotada la corrección, siempre negativa.

2.1.5.5 Pistola Haga.

Este clinómetro es de fundamento muy semejante al Hipsómetro Blume Leiss y se diferencia en que no tiene una ventana en la que aparecen todas las escalas sino que posee una abertura en la que mediante un tornillo se hace aparecer sucesivamente la escala a emplear en cada caso, para distancias de 15, 20, 25 y 30 m. Posee además otra escala en porcentaje de pendiente y una más en unidades inglesas. La aguja indicadora, al igual que la Blume-Leiss, se suelta y fija a voluntad y marca las alturas sobre la escala expuesta, aditivas o sustractivas según sea el caso (**Figuras 34 y 35**).

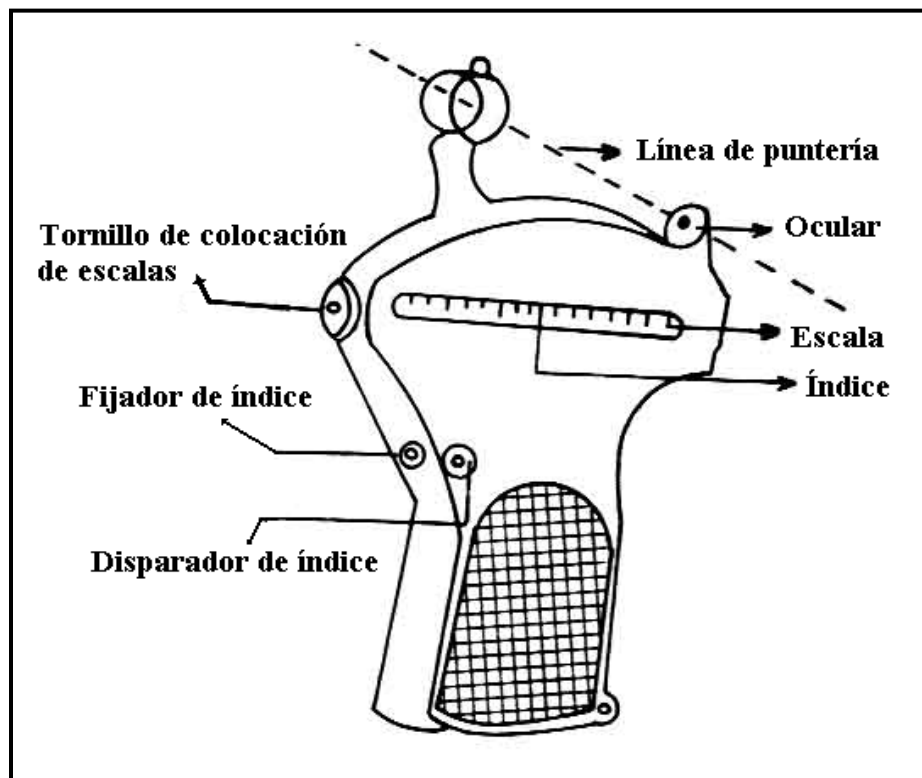


Figura 34. Elementos de la pistola Haga.



Figura 35. Pistola Haga.

2.1.6 Observaciones Prácticas.

Es importante conocer el fundamento de los procedimientos empleados y tener sentido práctico para utilizar en cada caso el instrumento o método que mejor se adapte a las circunstancias propias de cada ocasión, que de lo contrario pueden hacer inoperante la aplicación de algunos de los aparatos descritos.

Entre ellos, algunos son de mayor precisión que otros por lo que la elección de éstos depende de los objetivos de medición. El uso de un aparato más preciso no es garantía suficiente, ya que debe tenerse sumo cuidado al hacer las lecturas y al dirigir las visuales.

Un operador con bastante práctica puede hacer a ojo estimaciones confiables de la altura.

La inclinación de algunos árboles es fuente de error, como se muestra en las **Figuras 36 y 37**, puesto que en los cálculos se ha considerado vertical al árbol. En el caso del árbol inclinado hacia el operador (**Figura 36**), con la distancia horizontal **OC**, se estaría determinando la magnitud **BD** mayor que la altura **AB** del árbol. En el caso en que la inclinación del árbol es hacia el lado opuesto al operador (**Figura 37**), y con una distancia horizontal **OC**, la magnitud que se estaría determinando sería la **BD** menor que la altura **AB** del árbol.

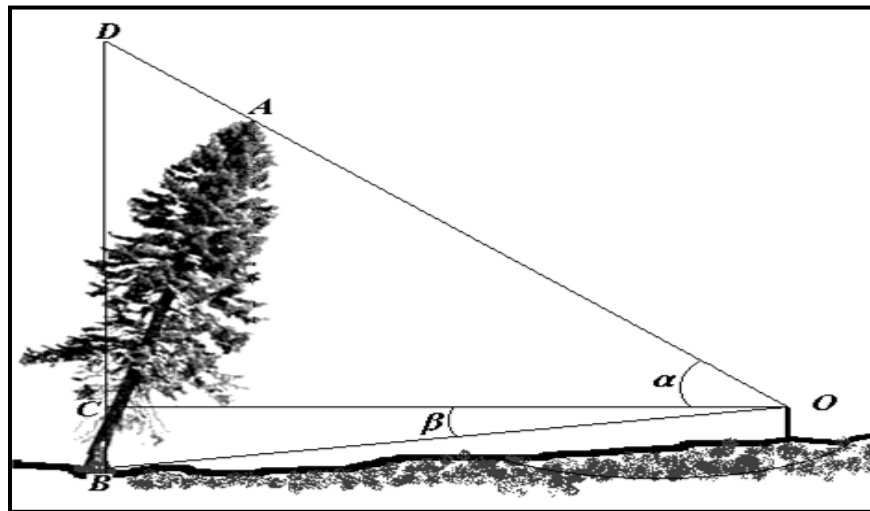


Figura 36. Altura BD determinada en un árbol inclinado hacia el operador.

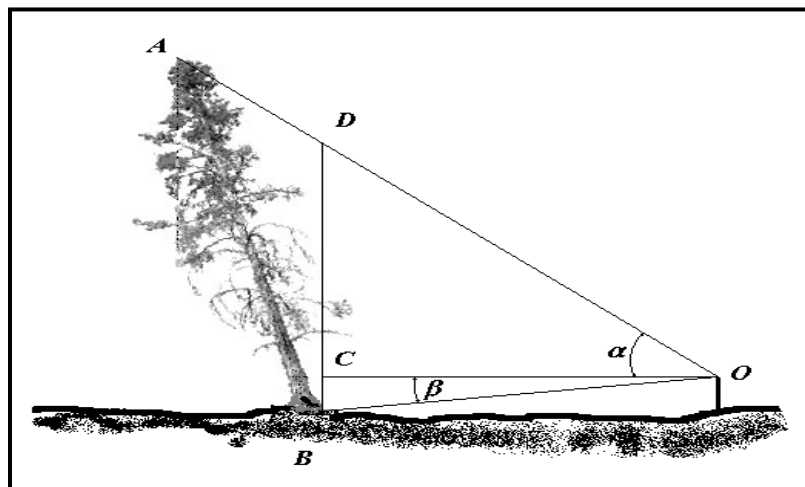


Figura 37. Altura BD determinada en un árbol inclinado en sentido opuesto al operador.

Los errores que se cometen debido a la inclinación del árbol pueden ser significativos, como se ve en la **Figura 38**, en la que un árbol cuya altura es de 22 m, inclinado hacia el operador, al hacer la determinación de su altura a 20 m de distancia horizontal a la base del árbol, ésta aparecería como de 31.3 m cometándose un error de 9.3 m que significa un 42% más que la altura real.

Si la determinación se hace a una mayor distancia horizontal a la base del árbol (**Figura 39**), como pudiese ser 30 m, el error disminuye, ya que la altura determinada a esta distancia para el mismo árbol de 22 m con un ángulo de inclinación de 20° , sería de 26.58 m, 4.58 m más, lo que significaría un error del 20%.

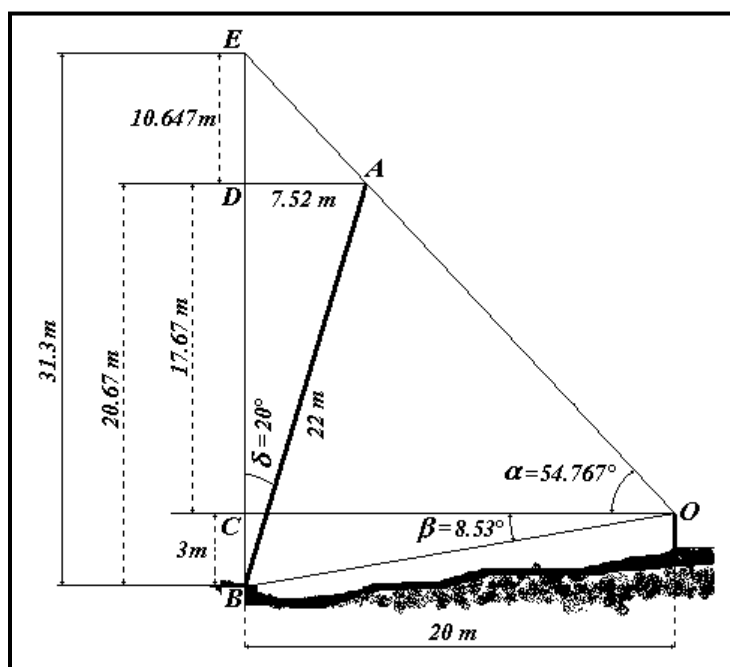


Figura 38. Error que se comete al determinar la altura de un árbol con un ángulo de inclinación de 20° hacia el operador, a una distancia horizontal de 20 m a la base.

En el caso de árboles cuya inclinación es en sentido apuesto al operador, también se cometen errores pero éstos son por defecto, es decir, la altura que se obtiene es menor a la altura real del árbol. Así, en el caso de un árbol de 22 m de altura con una inclinación de 20° en sentido opuesto al operador (**Figura 40**), si la altura se determina a 20 m de distancia horizontal a la base, ésta sería de 15.84 m con un error del 28%.

Para reducir estos errores en la determinación de alturas, se recomienda que la distancia horizontal que se utilice sea hasta el punto de proyección de la punta del árbol sobre el suelo. Así, en la **Figura 41**, al hacer la determinación de un árbol de 22 m de altura con una inclinación de 20° hacia el operador a una distancia de 20 m del punto de proyección (E) de la punta del árbol, la altura resultante sería de 20.67 m lo que implica un error del 6%.

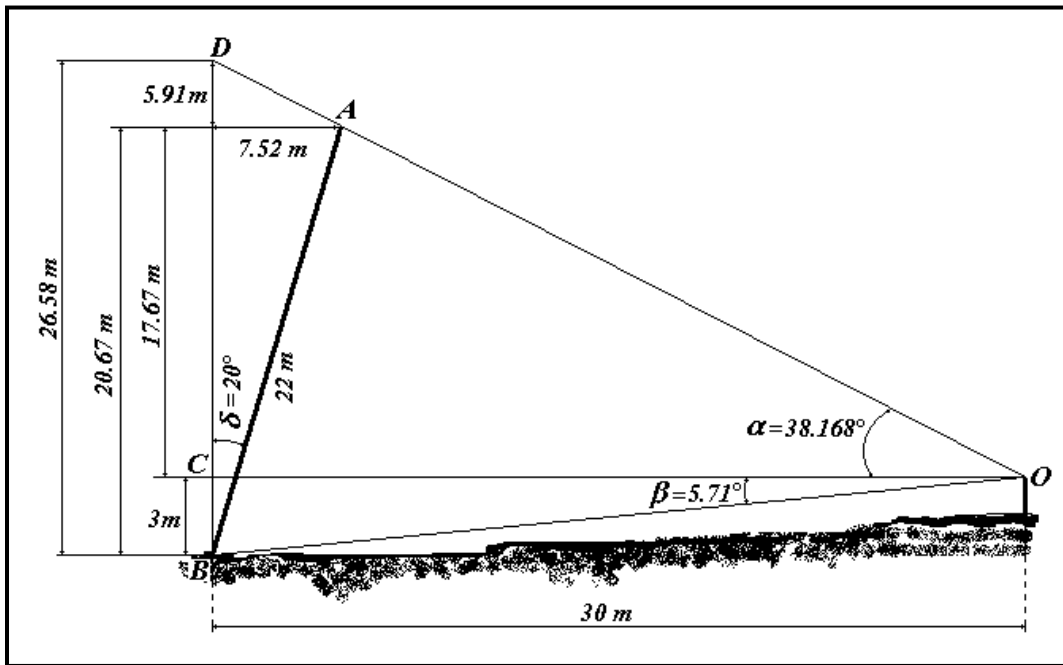


Figura 39. Error que se comete al determinar la altura de un árbol con un ángulo de inclinación de 20° hacia el operador, a una distancia horizontal de 30 m a la base.

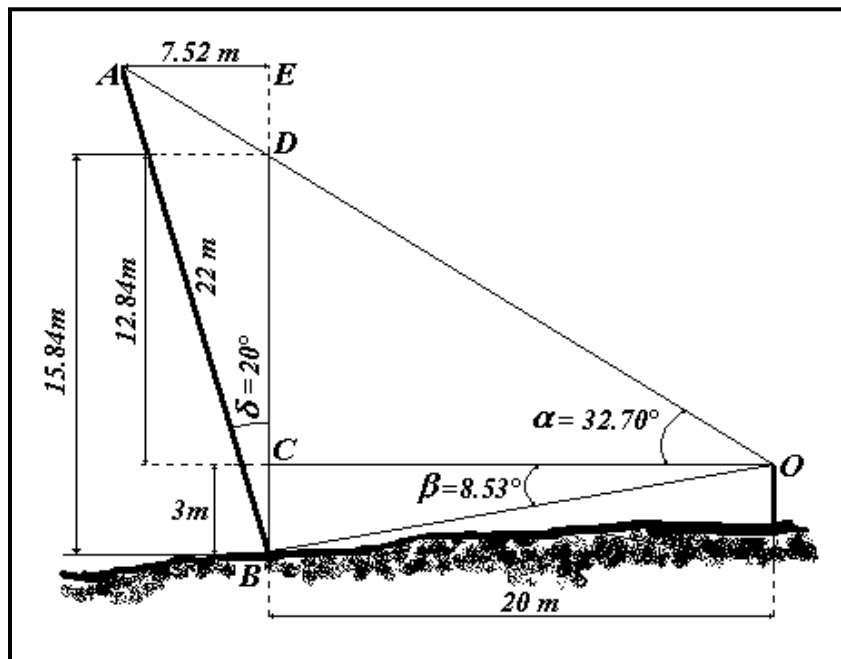


Figura 40. Error que se comete al determinar la altura de un árbol con un ángulo de inclinación de 20° en sentido opuesto al operador, a una distancia horizontal de 20 m a la base.

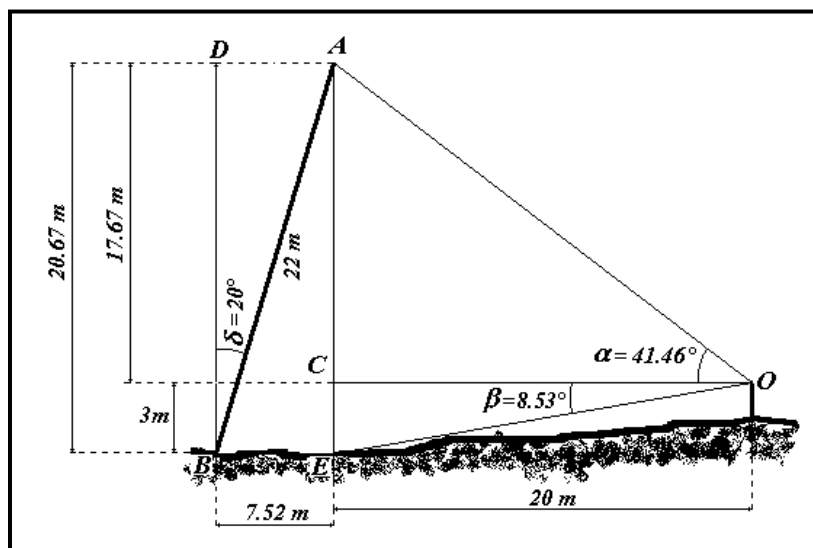


Figura 41. Reducción del error en la determinación de la altura de un árbol inclinado hacia el operador al tomar la distancia horizontal desde el punto de proyección de la punta del árbol.

Lo mismo se puede hacer en el caso en que los árboles tengan la inclinación en sentido opuesto al operador (**Figura 42**); la distancia horizontal debe ser la existente hasta el punto de proyección (*D*) de la punta del árbol.

En los dos casos, el error se puede reducir aún más si se aumenta la distancia horizontal desde la cual se determina la altura del árbol. Si se desea tener una determinación precisa de la altura de los árboles inclinados, basta con medir la distancia horizontal desde el punto de proyección de la punta del árbol hasta su base y aplicar el teorema de Pitágoras. Así, en el caso de la Figura 41 se tiene que $AD = 7.52 \text{ m}$ y $AE = 20.67$ con lo que la altura real del árbol sería $AB = \sqrt{20.67^2 + 7.52^2}$ igual a 21.995 m .

Otra fuente de error es el caso de árboles con copa redondeada o plana, en que alguna rama puede confundirse con la punta; este error se reduce aumentando la distancia al árbol.

La medición de una altura parcial del árbol puede hacerse de manera semejante a cualquiera de las descritas en este capítulo, bastará que las visuales sean dirigidas a los puntos que limitan la sección a la cual se quiere medir su longitud.

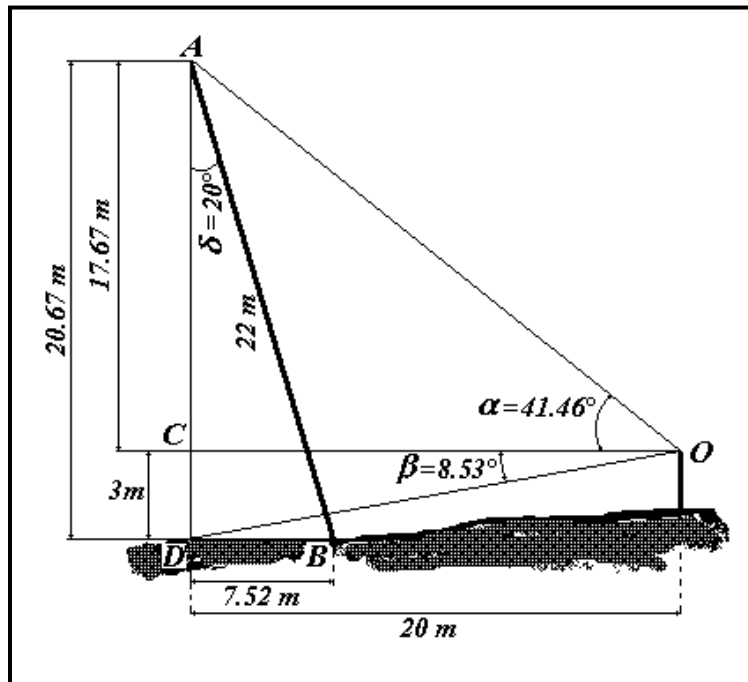


Figura 42. Reducción del error en la determinación de la altura de un árbol inclinado en sentido opuesto al operador al tomar la distancia horizontal al punto de proyección de la punta del árbol.

2.2 Medición de Diámetros.

La medición del diámetro consiste en determinar la longitud de la recta que pasando por el centro de un círculo termina en los puntos en que toca a la circunferencia. El diámetro más comúnmente requerido en Dasonomía es el de las partes maderables del árbol; tronco principal, ramas o segmentos del fuste (trozas). La importancia fundamental de la medición del diámetro radica en que es una dimensión que casi siempre se puede medir directamente y con ésta se puede calcular el área de la sección transversal y el volumen.

Uno de los objetivos principales de la medición del diámetro es determinar el área de la sección transversal en el punto de medición. Cuando la sección transversal es circular no se tiene dificultad en calcular el área y será suficiente con medir el radio, el diámetro o la circunferencia (**Figura 43**). Para los casos en que la sección transversal no es circular, para propósitos de cálculo se usa la fórmula del área del círculo siendo el problema encontrar algún diámetro que proporcione la aproximación más cercana al valor verdadero del área cuando se use con la fórmula del área del círculo.

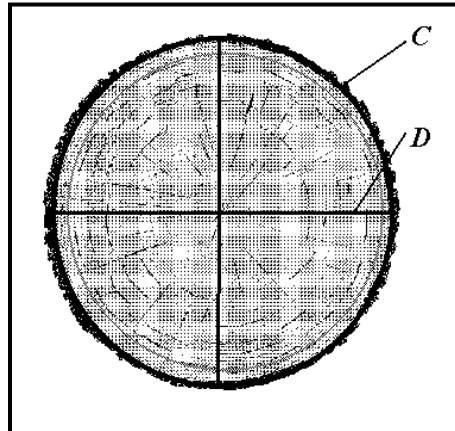


Figura 43. Diámetro o circunferencia en sección circular.

La desviación de la circularidad a menudo se aproxima a una elipse y en otros casos la sección transversal puede ser completamente irregular. En el primer caso se deben medir el diámetro mayor (D_M) y el diámetro menor (D_m) y se puede obtener, con las consideraciones que posteriormente se harán, su media aritmética, cuadrática o geométrica y utilizar a la obtenida como el diámetro de un círculo (Figura 44).

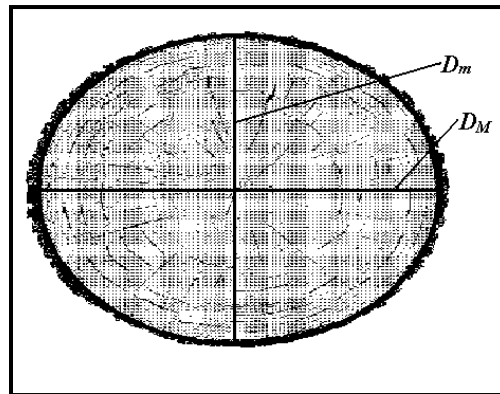


Figura 44. Diámetros en sección elíptica.

$$\bar{D}_a = \frac{D_M + D_m}{2}$$

Media aritmética de dos diámetros

$$\bar{D}_c = \sqrt{\frac{D_M^2 + D_m^2}{2}}$$

Media cuadrática de dos diámetros

$$\bar{D}_g = \sqrt{D_M * D_m}$$

Media geométrica de dos diámetros

En el caso de secciones transversales de forma irregular el diámetro apropiado no es tan obvio. No hay una propuesta que pueda ser aplicable en todos los casos. Para propósitos prácticos es recomendable asumir que la sección es una elipse y medir el diámetro mayor y otro perpendicular a aquél (**Figura 45**).

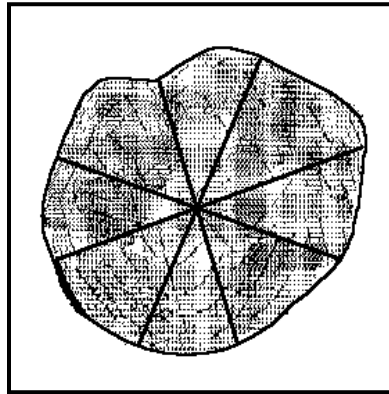


Figura 45. Diámetros en sección de forma irregular.

2.2.1 Diámetro Normal.

La medición del diámetro de árboles en pie, se ha estandarizado mundialmente a una altura de 1.30 m a partir del suelo (**Figura 46**), al cual se le denomina diámetro normal (d).

En terrenos con pendiente se hace esta medición a 1.30 m de altura por el lado de arriba de la pendiente (**Figura 47**). En árboles tropicales de los géneros *Ceiba*, *Ficus*, *Rosadendrom* y otros, es usual encontrar que en su base se han formado *contrafuertes* o *costillas* o *telchaques*; en esta circunstancia se recurre a la normalización del diámetro, que consiste en hacer la medición un metro arriba del punto en que el fuste ya es regular (**Figura 48**), esto es, de donde han terminado los contrafuertes (Punto A de la Figura 45).

Ocasionalmente el fuste a la altura del diámetro normal tiene deformaciones o protuberancias que falsearían el dato; en tales casos la medición del diámetro se hará en dos puntos equidistantes (y) hacia arriba y hacia abajo (donde el fuste sea regular), del punto ubicado a 1.3 m de altura y se obtendrá el promedio aritmético de los dos diámetros medidos d_1 y d_2 (**Figura 49**).

Una situación más que se puede presentar en la medición del diámetro normal es cuando el fuste del árbol tiene ondulaciones; en estos casos el diámetro normal se ubicará a la distancia de 1.3m medida a partir del centro de la base hacia

el centro del fuste. El diámetro normal se medirá perpendicular a la línea de medición del 1.3m (**Figura 50**).

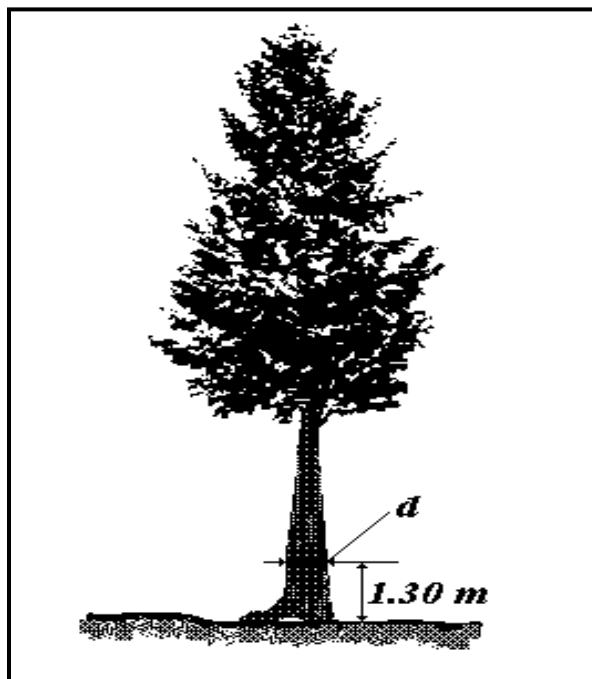


Figura 46. Diámetro normal (d), en terreno plano.

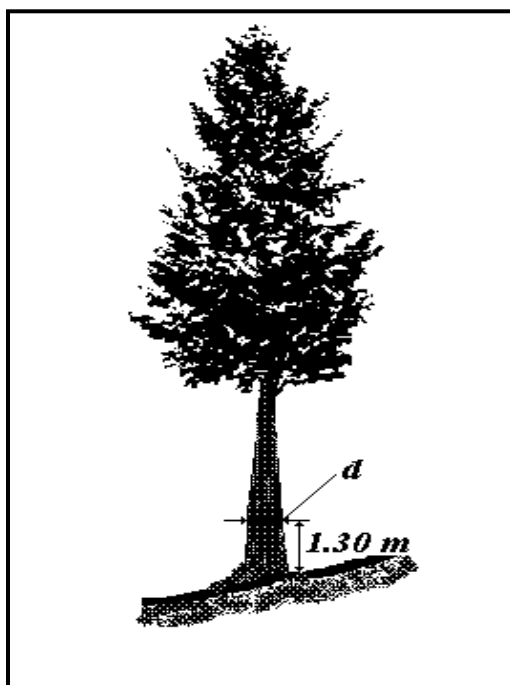


Figura 47. Diámetro normal (d), en terreno con pendiente.

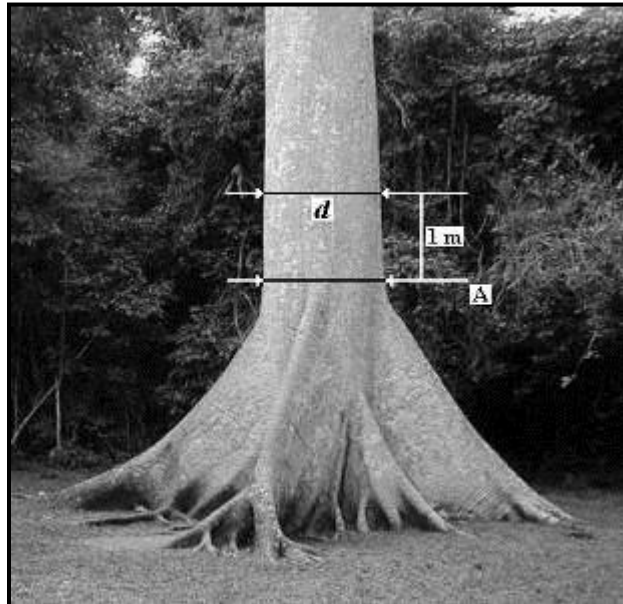


Figura 48. Diámetro normalizado (d) en árbol con contrafuertes; “A” es el punto en el que terminan éstos.

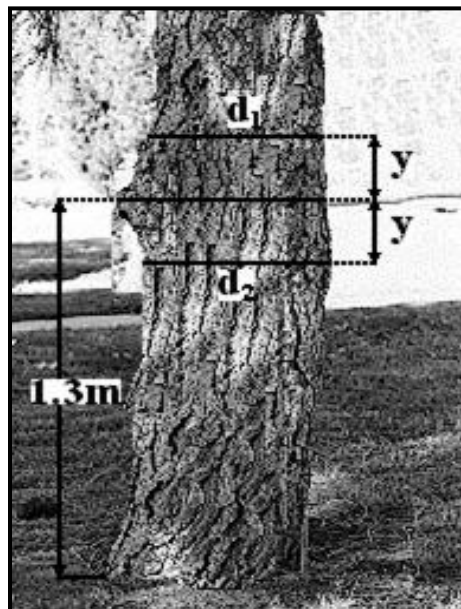


Figura 49. Diámetro normal en árbol con protuberancia a la altura de 1.3m.

Dos casos más que se pueden presentar en la medición del diámetro normal es cuando el árbol se encuentra inclinado en terreno plano o en terreno con pendiente (**Figura 51**).

En el primer caso, la distancia de 1.3m se deberá medir a partir de la base del árbol por el lado del ángulo agudo y el diámetro deberá ser perpendicular al eje

del fuste. Si el árbol se encuentra inclinado en un terreno con pendiente, el 1.3m se deberá medir en la parte de arriba de la pendiente y el diámetro medido deberá ser perpendicular al eje del fuste.

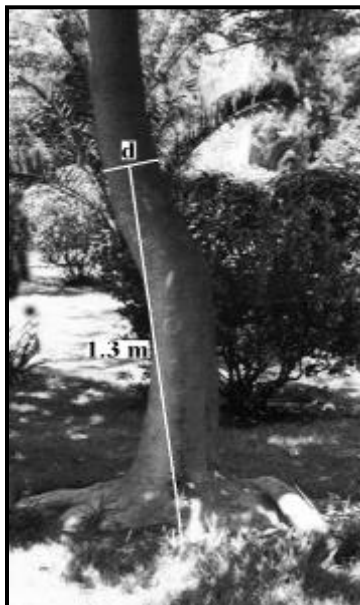


Figura 50. Medición del diámetro normal en un árbol con fuste ondulado.

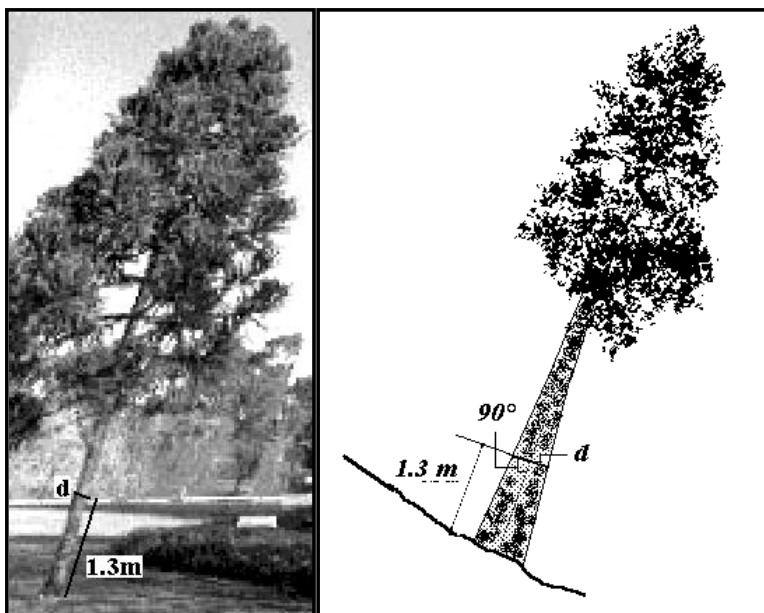


Figura 51. Medición del diámetro normal en árboles inclinados en terrenos plano e inclinado.

En el caso de árboles que tengan bifurcaciones, cuando éstas se presenten arriba del 1.3 m, se efectuará la medición del diámetro en la forma que se ha

indicado, considerándose un solo árbol; cuando la bifurcación se presente abajo del 1.3 m de altura, se medirán los diámetros de los brazos de manera perpendicular al eje de ellos y se considerarán tantos árboles como brazos tenga antes de la altura citada (**Figura 52**).

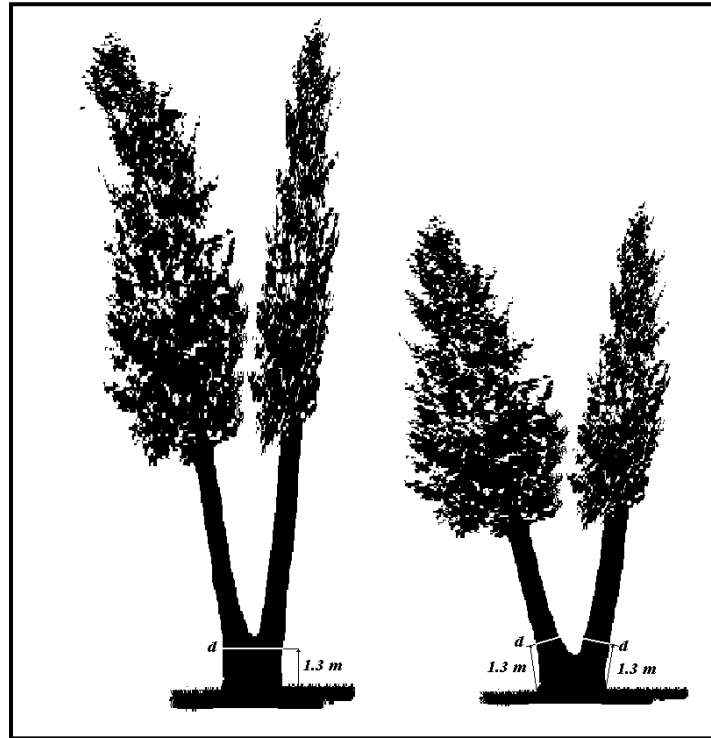


Figura 52. Medición del diámetro normal en árboles bifurcados.

2.2.2 Aparatos para la Medición de Diámetros Normales.

Comúnmente los diámetros de los árboles en pie se miden de una manera directa teniendo contacto con el árbol, ya sea utilizando forcípulas, cintas o reglas especiales, las cuales sirven para calcular el área de las secciones transversales, y con ellas y la altura se puedan determinar los volúmenes. También se han desarrollado otros instrumentos que permiten la medición del diámetro sin tener contacto directo con el árbol.

2.2.2.1 Forcípula.

Es un instrumento que se compone de una regla de madera graduada, con dos brazos perpendiculares a su longitud, fijo uno de ellos mediante perfecto ensamblaje o por otro medio en el extremo correspondiente al cero de la

graduación; el otro brazo es móvil y se desliza sobre la regla conservándose en todas sus posiciones perpendicular a la regla y paralelo al brazo fijo. La longitud de la regla depende del grueso o diámetro de los árboles que se han de medir con ella, las más grandes generalmente tienen reglas cuya longitud no excede 1.20 m (Figura 53).

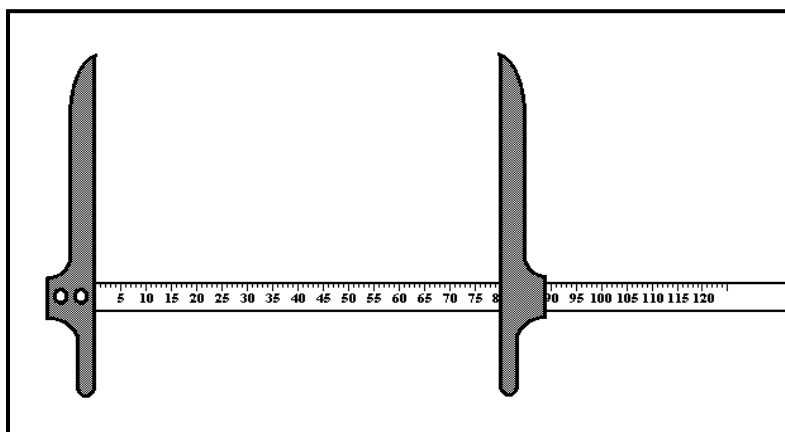


Figura 53. Forcípula de brazos paralelos.

La graduación de la forcípula depende del grado de exactitud con que se pretenda hacer la medición; generalmente bastan los centímetros, sin embargo en trabajos de precisión es necesario señalar en la regla los medios centímetros y los milímetros, y en otros casos la graduación es en categorías diamétricas. Asimismo, las forcípulas pueden estar graduadas en algún otro sistema, como el inglés, en el que se usan pulgadas (Figura 54).

La forcípula, para que sea efectiva en su utilización debe reunir cuatro condiciones:

- 🌲 Debe ser ligera
- 🌲 Debe ser fuerte
- 🌲 Debe ser recta, plana y desprovista de torsión con el objeto de que los dos brazos se encuentren constantemente en el mismo plano que la regla.
- 🌲 El brazo fijo a la regla y el móvil deben ser perpendiculares a la regla y conservarse paralelos en todas sus posiciones.

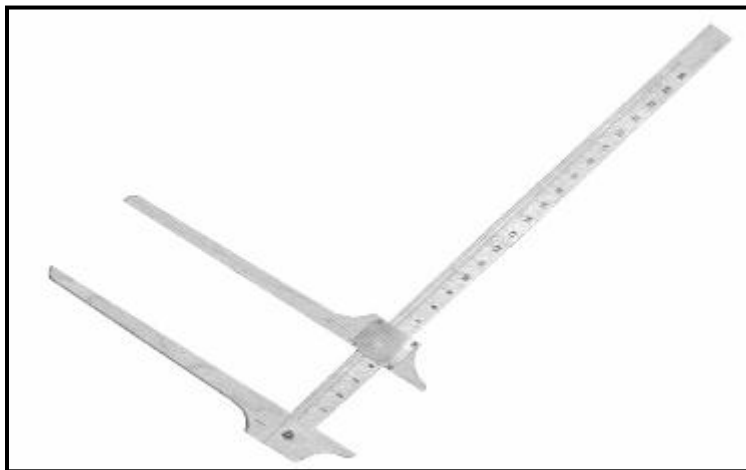


Figura 54. Forcípula de brazos paralelos con graduación en pulgadas.

Las dos primeras condiciones se satisfacen usando en la construcción de las forcípulas maderas ligeras y resistentes como el nogal, pino, cedro o fresno, o metales como el aluminio.

El cumplimiento de la tercera condición requiere que se empleen materiales escogidos independientemente del cuidado que requiere su construcción. Las maderas usadas deben estar perfectamente secas, libres de nudos y de otros defectos; su fibra debe ser derecha, ya que al no satisfacer las condiciones señaladas, pueden torcerse o alterarse sus dimensiones en forma sensible pues las forcípulas se usan a la intemperie y son susceptibles al medio.

La cuarta condición es de importancia manifiesta; cuando el brazo móvil no es perpendicular a la regla y paralelo al brazo fijo en todas sus posiciones el error sistemático es significativo (**Figura 55A**).

Este error es todavía mayor cuando la forcípula se usa en forma incorrecta, es decir, cuando los diámetros se miden con la punta de los brazos (**Figura 55B**).

El defecto de normalidad señalado y la subsiguiente falta de paralelismo proviene del pequeño juego que es necesario dar al brazo móvil para asegurar su deslizamiento suave sobre la regla, el cual aumenta con el uso y por efecto del desgaste de la madera.

Se han ideado diversos dispositivos para corregir este defecto; uno de ellos consiste en actuar sobre el tornillo que se encuentra en la parte más ancha del brazo móvil para corregir la falta de perpendicularidad del mismo.

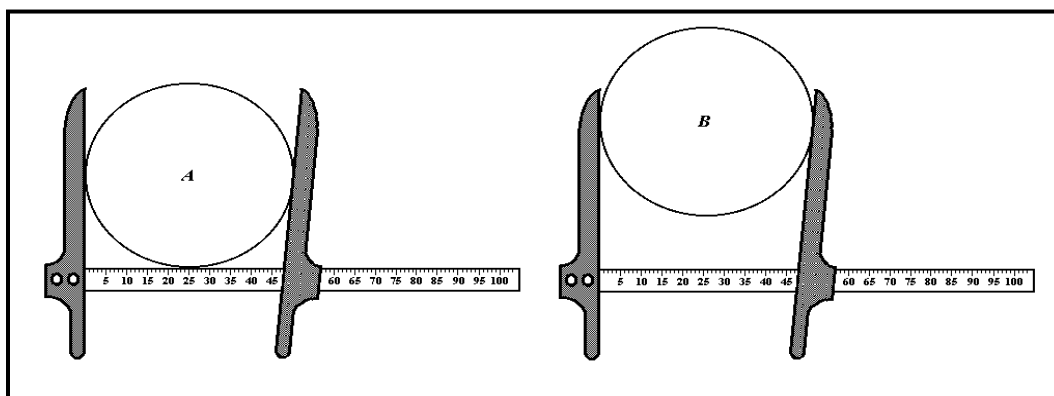


Figura 55. Errores en la medición de diámetros por falta de paralelismo de los brazos (A) y por ésta y falta de tangencia en tres puntos (B).

2.2.2.2 Cinta diamétrica.

Cualquier cinta métrica sirve para medir una circunferencia y con base en ella se puede calcular el diámetro. La relación existente entre el diámetro y la circunferencia es:

$$C = \pi * d \quad \therefore \quad d = \frac{C}{\pi}$$

C = circunferencia

d = diámetro

π = 3.1416

De este modo, si la medida de la circunferencia se divide entre 3.1416 se obtiene la dimensión del diámetro. Así, una cinta métrica que también tenga una graduación en la que cada unidad equivalga a 3.1416 cm, es evidente que hará directamente la transformación de circunferencia a diámetro. (**Figura 56**).

Estas cintas se fabrican de acero, tela, vinilo u otro material flexible, y en su extremo llevan un gancho para sujetarla al tronco en el momento de la medición. Para una lectura correcta debe colocarse pegada al tronco y en un mismo plano que sea perpendicular al eje del mismo (**Figura 57**).

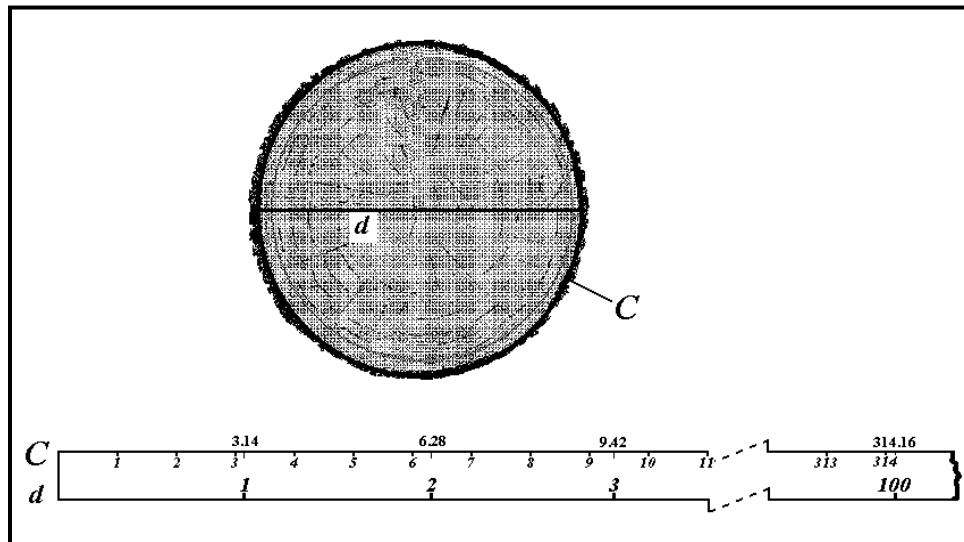


Figura 56. Cinta diamétrica; relación entre el diámetro y la circunferencia.

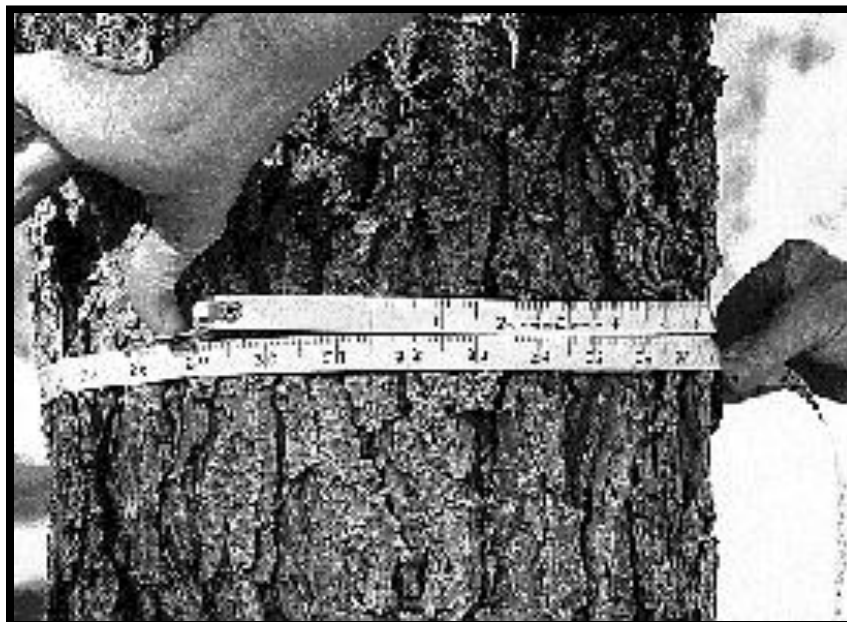


Figura 57. Medición del diámetro normal con cinta diamétrica.

2.2.2.3 Regla Biltmore.

Este es un instrumento que se utiliza para la medición aproximada de diámetros normales de árboles en pie. Es una regla recta aproximadamente de 75 cm de largo, graduada en tal forma que cuando se aplica horizontalmente al lado de un árbol y con el ojo del observador exactamente a 60 cm del mismo, puede leerse directamente el diámetro.

El observador debe mantener la cabeza inmóvil y mover la regla hasta que su extremo quede exactamente entre el ojo y un lado del árbol. La graduación de la regla que queda en línea con el ojo y el otro lado del árbol corresponden al diámetro. Para lograr lo anterior los intervalos de graduación deben ajustarse de modo que permitan la divergencia de las dos líneas de mira, desde el ojo del observador y los dos lados del árbol.

La fórmula para este ajuste puede determinarse geoméricamente como sigue: El círculo cuyo centro es C (**Figura 58**), representa la sección del árbol en el punto de medición; EBF , la regla Biltmore aplicada tangencialmente al árbol; A , el ojo del observador; y AED y AFG , las dos líneas de mira hacia los lados del árbol. Se trata de determinar con la regla, desde F a E , la distancia S que corresponde a un diámetro dado $d = 2 BC = 2 DC$.

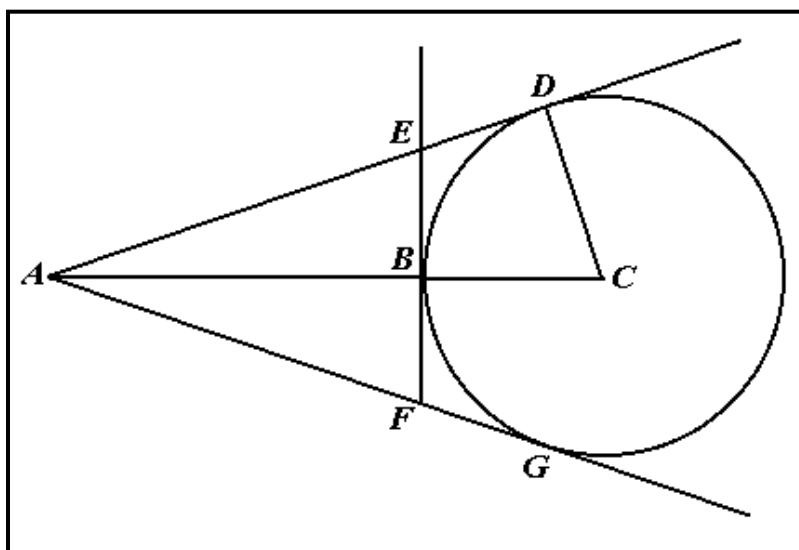


Figura 58. Base geométrica de la regla de Biltmore.

Por definición:

$$\begin{aligned} AB &= 60 \text{ cm} \\ S &= EF = 2BE; \\ D &= 2CD = 2BC \end{aligned}$$

Además, los triángulos ABE y ACD son triángulos rectángulos y por ende semejantes. Por consiguiente:

$$BE : AB :: CD : AD$$

Asimismo: $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2}$

$$AD = \sqrt{(AB+BC)^2 - CD^2}$$

$$AD = \sqrt{(60 + d/2)^2 - (d/2)^2}$$

$$AD = \sqrt{(60)^2 + 60d + (d/2)^2 - (d/2)^2}$$

$$AD = \sqrt{(60*60) + 60d} = \sqrt{60*(60+d)}$$

Si: $\frac{S}{2} : 60 :: \frac{d}{2} : \sqrt{60*(60+d)}$

Entonces:

$$\frac{S/2}{60} = \frac{d/2}{\sqrt{60*(60+d)}}$$

$$S/2 = \frac{60*(d/2)}{\sqrt{60*(60+d)}}$$

$$S = \frac{60 d}{\sqrt{60*(60+d)}}$$

$$S^2 = \frac{(60)^2 * d^2}{60*(60 + D)} = \frac{60 * 60 * d^2}{60*(60 + d)}$$

$$S^2 = \frac{60 d^2}{60 + d} = \frac{60 d^2}{60 (1+d/60)} = \frac{d^2}{1 + d/60}$$

Genéricamente esta fórmula es:

$$S = \frac{d}{\sqrt{1 + \frac{d}{AB}}}$$

En la cual:

S = Distancia del cero de la regla a la posición para un diámetro dado,

d = Diámetro dado del árbol,

AB = Distancia perpendicular del ojo a la regla.

Con la fórmula anterior, suponiendo diferentes diámetros progresivos, puede graduarse esta regla para cada uno de ellos.

La regla Biltmore no es un instrumento de precisión. La principal causa de error consiste en que es difícil mantener la distancia de 60 cm del ojo al árbol. La más ligera desviación produce un error muy considerable en las lecturas. Sus principales ventajas son la resistencia y la comodidad de transportación. También es difícil mantener la regla perpendicular a la visual AB .

Ventajas:

- 🌲 Instrumento ligero, cómodo y fácil de transportar.
- 🌲 Solo se requiere una lectura.
- 🌲 Es apropiado y cómodo para árboles de grandes dimensiones y para comprobar, ocasionalmente, estimaciones.
- 🌲 Permite operar con rapidez.

Desventajas:

- 🌲 Es un instrumento poco exacto.
- 🌲 El árbol medido debe estar en un plano vertical.
- 🌲 La sección en el punto de medida debe ser un círculo perfecto ya que el error por este concepto es mayor.
- 🌲 Es difícil mantener la regla a la distancia exacta requerida.
- 🌲 Es difícil marcar en la regla fracciones de unidad (décimos de pulgada), por lo que no es recomendable para trabajos de precisión.

2.2.2.4 El microdendrómetro.

Es un aparato diseñado para medir el crecimiento del diámetro del árbol o su variación en periodos determinados. Se llama microdendrógrafo cuando está diseñado para que el crecimiento se marque sobre un papel.

2.2.2.5 Otros instrumentos para medir diámetros.

Forcípula de brazo parabólico. También conocida como forcípula finlandesa, está constituida por un brazo recto y otro parabólico, el cual se encuentra graduado de manera tal que el diámetro se lee en el punto de contacto con el árbol. Para la medición directa de diámetros superiores se coloca en pértigas de hasta 8 m de longitud. (Figura 59)

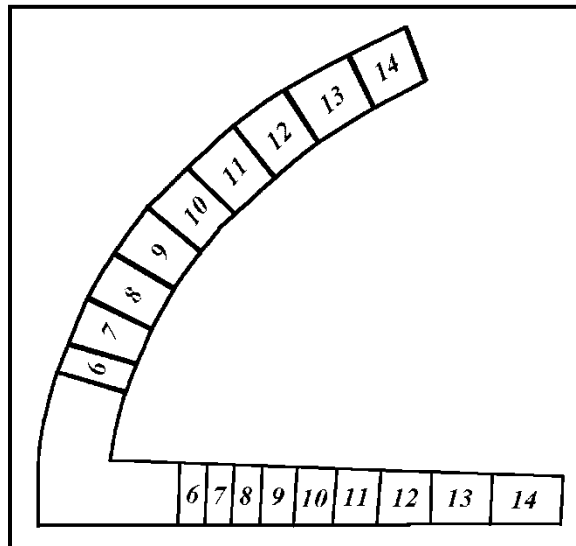


Figura 59. Forcípula de brazo parabólico.

Forcípula en forma de “V”. Está conformada por dos brazos rectos graduados, unidos en ángulo, útil para árboles de diámetros pequeños. (Figura 60).

Este instrumento está constituido por dos piezas de madera unidas en un extremo generando un ángulo agudo. Una vez definido el ángulo, se puede construir la escala en cada pieza de madera utilizando unidades L que serán una función del ángulo α y del radio R de la sección transversal de árboles con base en las siguientes relaciones:

$$\tan \alpha = \frac{aC}{aO} = \frac{R}{L} \quad \therefore L = \frac{R}{\tan \alpha}$$

De esta manera, si $\alpha = 20^\circ$, $d = 25$, $R = 12.5$

$$L = \frac{12.5}{0.176327} = 70.89 \text{ cm}$$

Y así para cada uno de los diámetros que se desee grabar en las reglas.

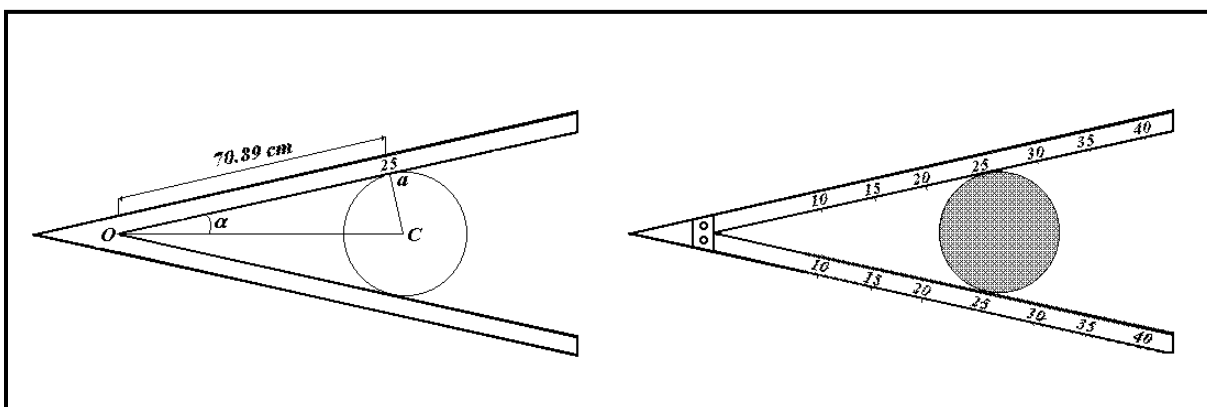


Figura 60. Forcípula en forma de V.

2.2.3 Diámetros Superiores del Fuste.

Frecuentemente se requiere medir el diámetro en puntos más altos que el diámetro normal, para estimaciones de forma o para cubicaciones. La idea de computación directa de volúmenes de “árboles muestra” en trabajos de inventarios forestales, se basa en la medición de diámetro en varios puntos a lo largo del fuste y esto ha estimulado el interés por desarrollar instrumentos para este propósito.

La principal diferencia para la medición del diámetro normal y diámetros superiores, consiste en la dificultad de ubicar físicamente el instrumento de medición. Los diámetros superiores se pueden medir con los instrumentos antes descritos pero es necesario escalar el árbol, lo cual implica riesgos y resulta costoso por su lentitud. Los diámetros a cierta altura se pueden medir con una forcípula o una cinta métrica montada en una pértiga.

En 1958 la *Society of American Foresters* definió al dendrómetro como “un instrumento diseñado para estimar los diámetros de árboles en pie a cualquier altura, dados por visuales desde el suelo” (Husch *et al.*, 1972).

Entre los instrumentos que se han ideado para la determinación de diámetros superiores en el fuste se pueden mencionar la forcípula óptica en forma de “V”, el

pentaprisma de Wheeler, el relascopio de Bitterlich, el telerrelascopio, el dendrómetro Barr & Stroud e inclusive, teodolitos y tránsitos.

2.3 Medición de Secciones.

Convencionalmente, el área de la sección transversal tomada a 1.3 m de altura en un fuste, o sea a la altura del diámetro normal, se denomina “área basal” y se representa con la letra ***g*** minúscula. A la suma de las áreas basales de los árboles en una hectárea se le llama área basal total y se representa con la letra ***G*** mayúscula expresada en ***m²/ha***.

Tratándose del área basal o del área de cualquier sección transversal se pueden presentar los casos ya mencionados en la medición del diámetro. Usualmente se asume que la forma de la sección es circular y se calcula basándose en el diámetro.

Cuando la sección es circular no hay problema al calcular la superficie de la sección transversal mediante las expresiones que nos dan el área del círculo (**Figura 61**).

En las expresiones siguientes se tiene:

C = circunferencia,

d = diámetro

r = radio

S_c = Superficie del círculo

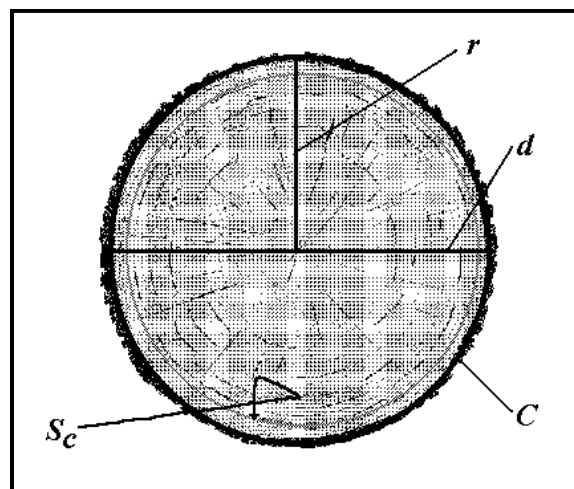


Figura 61. Sección transversal circular con elementos para el cálculo de su superficie.

$$S_c = \pi * r^2 = 3.1416 * r^2$$

De otra manera:

$$S_c = \frac{\pi * d^2}{4} = 0.7854 * d^2$$

En medición forestal es común referirse al diámetro, por lo que se utiliza la última expresión de la fórmula anterior.

Cuando se tiene el valor de la circunferencia se puede hacer la transformación de circunferencia a diámetro, mediante la expresión:

$$C = \pi d \therefore d = \frac{C}{\pi}$$

O bien calcular directamente el área a partir del valor de la circunferencia:

$$S_c = \frac{C^2}{4 \pi}, \text{ por lo que } S_c = \frac{C^2}{12.564}$$

En caso de secciones transversales elípticas para la determinación de su superficie se puede utilizar la media aritmética, la media cuadrática o la media geométrica de los diámetros perpendiculares entre sí, utilizándose alguna de éstas en la fórmula del área del círculo.

La utilización de la fórmula con la que se obtiene la superficie del círculo, cuando la sección transversal es elíptica o con tendencia a la elipse, hace incurrir en error según la media de los diámetros perpendiculares que se use, por lo cual es conveniente tener conocimiento de tal error cuando se requiere un grado de exactitud específico.

El área de una sección elíptica (**Figura 62**), es igual a:

$$S_e = \frac{\pi D_M D_m}{4} \quad \text{o} \quad S_e = \pi r_M r_m$$

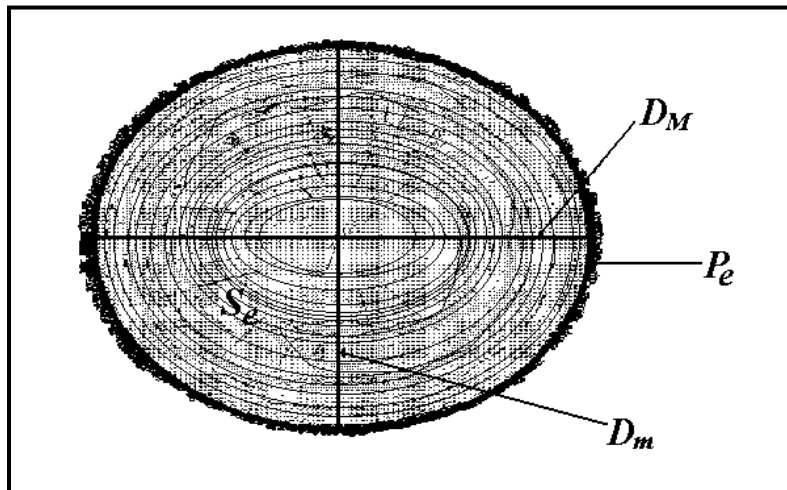


Figura 62. Sección transversal elíptica con elementos para el cálculo de su superficie.

2.3.1 Errores en la Determinación del Área de Secciones Transversales Elípticas.

Algunos autores aconsejan que el área de las secciones transversales elípticas, que tienden a la elipse o irregulares se calcule tomando la media aritmética de los dos diámetros de la elipse o de secciones que tiendan a tomar esta forma o del eje mayor y de otro perpendicular a él en las secciones irregulares y determinando el área como si fuera circular:

$$\bar{D}_a = \frac{D_M + D_m}{2}$$

Sustituyendo el valor de \bar{D}_a en la fórmula de la superficie del círculo tenemos:

$$S_{e \rightarrow \bar{d}_a} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D_M + D_m}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D_M^2 + 2D_M D_m + D_m^2}{4} \right)$$

Para calcular el error absoluto que se comete al estimar la superficie de una elipse considerándola como un círculo utilizando la media aritmética de sus diámetros mayor y menor como diámetro de éste, comparamos por diferencia las expresiones que nos dan la superficie de la elipse utilizando la media aritmética de los diámetros en la fórmula del círculo y la que nos da el valor real de la superficie de la elipse:

$$\varepsilon_{A(S_{e \rightarrow \bar{d}_a}) - S_e} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D_M^2 + 2D_M D_m + D_m^2}{4} \right) - \frac{\pi D_M D_m}{4}$$

$$\varepsilon_{A(S_{e \rightarrow \bar{d}_a}) - S_e} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D_M^2 + 2D_M D_m + D_m^2 - 4D_M D_m}{4} \right)$$

$$\varepsilon_{A(S_{e \rightarrow \bar{d}_a}) - S_e} = \frac{\pi}{16} (D_M^2 - 2D_M D_m + D_m^2)$$

$$\varepsilon_{A(S_{e \rightarrow \bar{d}_a}) - S_e} = \frac{\pi}{16} (D_M - D_m)^2$$

Esta última expresión es el error que se comete al estimar el área de una elipse utilizando la fórmula del área del círculo y la media aritmética de sus diámetros.

Para tener una idea clara sobre la magnitud del error, supongamos que tenemos una troza con una sección transversal elíptica cuyos diámetros son $D_M = 0.60m$ y $D_m = 0.50m$.

La superficie real de la elipse será:

$$S_e = \frac{\pi D_M D_m}{4} = \frac{\pi * 0.60 * 0.50}{4} = \frac{0.9424778}{4} = 0.23561945 m^2$$

La superficie estimada de la elipse utilizando la media aritmética de los diámetros y la fórmula del área del círculo será:

$$S_{e \rightarrow \bar{d}_a} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{0.60 + 0.50}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1.21}{4} \right) = \frac{\pi}{16} (1.21) = 0.23758294 m^2$$

Como puede observarse, el valor estimado de la superficie es mayor que el real, es decir, se comete un error por exceso; la magnitud del error será:

$$\varepsilon_{A(S_{e \rightarrow \bar{d}_a}) - S_e} = \frac{\pi}{16} (D_M - D_m)^2 = \frac{\pi}{16} (0.6 - 0.5)^2$$

$$\varepsilon_{A(S_{e \rightarrow \bar{d}_a}) - S_e} = \frac{0.03141592}{16} = .00196349m^2$$

El error relativo se obtiene dividiendo el error absoluto entre la superficie real de la elipse y multiplicando el resultado por 100 para expresarlo en por ciento.

$$\varepsilon_{R(S_{e \rightarrow \bar{d}_a}) - S_e} = \frac{\frac{\pi}{16} (D_M - D_m)^2}{\frac{\pi}{4} D_M D_m} 100 = \frac{0.00196349}{0.23561945} 100 = 0.833\%$$

Como se puede observar, el error relativo cometido en este caso es menor al 1%.

Otros autores aconsejan utilizar la media cuadrática de los diámetros o ejes para el cálculo de la superficie de secciones transversales elípticas, que tienden a la elipsis o irregulares.

La media cuadrática de los diámetros será igual a:

$$\bar{D}_c = \sqrt{\frac{D_M^2 + D_m^2}{2}} \quad \therefore \quad \bar{D}_c^2 = \frac{D_M^2 + D_m^2}{2}$$

Para determinar el error absoluto que se comete al estimar la superficie de una elipse considerándola como un círculo utilizando la media cuadrática de sus diámetros mayor y menor como diámetro de éste, comparamos por diferencia las expresiones que nos dan la superficie de la elipse utilizando la media cuadrática de los diámetros en la fórmula del círculo y la que nos da el valor real de la superficie de la elipse:

Sustituyendo esta expresión en la fórmula de la superficie del círculo tenemos:

$$S_{e \rightarrow \bar{d}_c} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D_M^2 + D_m^2}{2} \right)$$

Restando a esta expresión el valor real de la superficie de la elipse tendremos el error que se comete:

$$\varepsilon_{A(S_{e \rightarrow \bar{d}_c})-S_e} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D_M^2 + D_m^2}{2} \right) - \frac{\pi D_M D_m}{4}$$

$$\varepsilon_{A(S_{e \rightarrow \bar{d}_c})-S_e} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D_M^2 + D_m^2 - 2D_M D_m}{2} \right)$$

$$\varepsilon_{A(S_{e \rightarrow \bar{d}_c})-S_e} = \frac{\pi}{8} (D_M - D_m)^2$$

El error relativo expresado en por ciento será:

$$\varepsilon_{R(S_{e \rightarrow \bar{d}_c})-S_e} = \frac{\frac{\pi}{8} (D_M - D_m)^2}{\frac{\pi}{4} D_M D_m} 100$$

$$\varepsilon_{R(S_{e \rightarrow \bar{d}_c})-S_e} = \frac{(D_M - D_m)^2}{2 D_M D_m} 100$$

Si consideramos los mismos valores numéricos que en la ejemplificación del error con la media aritmética o sea una troza con una sección transversal elíptica cuyos diámetros son $D_M = 0.60m$ y $D_m = 0.50m$, tendremos que la superficie estimada de la elipse utilizando la media cuadrática de los diámetros y la fórmula del área del círculo será:

La superficie real de la elipse:

$$S_e = \frac{\pi D_M D_m}{4} = \frac{\pi * 0.60 * 0.50}{4} = \frac{0.9424778}{4} = 0.23561945 m^2$$

La superficie estimada de la elipse utilizando la media cuadrática de los diámetros y la fórmula del área del círculo:

$$S_{e \rightarrow \bar{d}_c} = \frac{\pi}{8} (0.60^2 + 0.50^2) = \frac{\pi}{8} (0.36 + 0.25) = \frac{\pi}{8} (0.61) = 0.23954644 m^2$$

Como puede observarse, el valor estimado de la superficie es mayor al real, es decir, se comete un error por exceso, mayor que el que se comete con la media aritmética. La magnitud del error será:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{A(S_{e \rightarrow \bar{d}_c})-S_e} &= \frac{\pi}{8} (D_M - D_m)^2 = \frac{\pi}{8} (0.6 - 0.5)^2 \\ \varepsilon_{A(S_{e \rightarrow \bar{d}_c})-S_e} &= \frac{\pi}{8} (0.1)^2 = \frac{0.03141592}{8} = 0.00392699 \text{ m}^2\end{aligned}$$

El error relativo que se comete con la media cuadrática, expresado en por ciento, en este caso, es de:

$$\varepsilon_{R(S_{e \rightarrow \bar{d}_c})-S_e} = \frac{(D_M - D_m)^2}{2 D_M D_m} 100 = \frac{(0.6 - 0.5)^2}{2 * 0.6 * 0.5} 100 = \frac{0.01}{0.6} 100 = 1.667\%$$

Si comparamos los errores absolutos que se cometen con la media aritmética y la media cuadrática observaremos que con esta última se comete un error igual al doble del que se comete con la media aritmética.

Se puede concluir que, ante la dificultad o negativa a usar la media geométrica para la determinación de la superficie de una sección transversal elíptica (o sea la utilización ortodoxa de la fórmula de la elipse), la media aritmética nos da resultados más aproximados y sería más recomendable por su sencillez.

Uno de los instrumentos para la determinación del diámetro que ha tenido una gran aceptación y cuyo uso se extiende cada vez más es la cinta diamétrica, por lo que es importante definir el grado de precisión que tiene cuando con ella se estima el diámetro en secciones elípticas.

Como se vio anteriormente, este instrumento está graduado en múltiplos de π centímetros por lo que al rodear el perímetro de una sección transversal circular se obtiene el diámetro. Cuando con la cinta diamétrica se rodea el perímetro de una sección transversal elíptica, aquella nos proporciona un diámetro y con éste se calcula el área de la sección transversal correspondiente. Estrictamente, lo que se hace es calcular a partir del perímetro el área de un círculo utilizando las relaciones que éste tiene entre su diámetro, circunferencia y área de la siguiente manera:

$$C = \pi D \therefore D = \frac{C}{\pi}$$

$$S_c = \frac{\pi * D^2}{4}$$

En estas expresiones se tiene:

C = Circunferencia

D = Diámetro

S_c = Área de un círculo

Si en la última expresión sustituimos por D su valor en función de C tendremos:

$$S_c = \frac{\pi * \left(\frac{C}{\pi}\right)^2}{4}$$

Simplificando:

$$S_c = \frac{C^2}{4\pi}$$

Al determinar el perímetro de una elipse (P_e), con la cinta diamétrica, de una u otra manera lo estamos calculando en función de sus diámetros o de sus radios (R_M y R_m), de tal forma que su valor será igual a:

$$P_e = 2\pi \sqrt{\frac{1}{2}(R_M^2 + R_m^2)}$$

$$P_e^2 = 4\pi^2 \left[\frac{1}{2}(R_M^2 + R_m^2) \right]$$

Si sustituimos el valor de P_e^2 en lugar de C^2 , en la fórmula que nos da la superficie del círculo en función de la circunferencia tendremos una estimación de la superficie de la elipse (S_{ee}).

$$S_{ee} = \frac{P_e^2}{4\pi} = \frac{4\pi^2 \left[\frac{1}{2} (R_M^2 + R_m^2) \right]}{4\pi}$$

$$S_{ee} = \frac{\pi}{2} (R_M^2 + R_m^2)$$

Éste será el valor estimado de la superficie de una elipse cuando sustituimos el valor de su perímetro en la fórmula que da la superficie de un círculo en función de su circunferencia.

Para determinar el error que se comete en la estimación de la superficie de la elipse, lo comparamos por diferencia con la expresión que nos da la superficie real de ese plano:

$$\varepsilon_{S_{ee}-S_e} = S_{ee} - S_e$$

$$\varepsilon_{S_{ee}-S_e} = \frac{\pi}{2} (R_M^2 + R_m^2) - \pi R_M R_m$$

$$\varepsilon_{S_{ee}-S_e} = \frac{\pi}{2} (R_M^2 - 2R_M R_m + R_m^2)$$

$$\varepsilon_{S_{ee}-S_e} = \frac{\pi}{2} (R_M - R_m)^2$$

Expresado este error en función de los diámetros de la elipse tendríamos:

$$\varepsilon_{S_{ee}-S_e} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{D_M - D_m}{2} \right)^2$$

$$\varepsilon_{S_{ee}-S_e} = \frac{\pi}{8} (D_M - D_m)^2$$

Esta expresión nos indica que el error que se comete al determinar el diámetro de una sección transversal elíptica o su superficie a partir de su perímetro es equivalente al que se comete si se utiliza la media cuadrática de sus diámetros mayor y menor, por lo que no es recomendable la utilización de la cinta diamétrica

en la determinación de diámetros en trabajos de investigación, siendo más recomendable la utilización de forcípula y la obtención de la media aritmética de los diámetros en este tipo de secciones transversales de fustes o trozas.

2.3.2 Otras Áreas de Importancia en Dasonomía.

Área basal total. El área basal total o área basal sobre hectárea simbolizada por la letra G , es una medida de la densidad de un rodal y se expresa en m^2/ha . El área basal promedio \bar{g} , se calcula sumando las áreas basales de los árboles que están dentro de la hectárea y dividiendo esta suma entre el número total de árboles en la misma extensión.

Áreas de las secciones transversales de trozas o fustes. Se obtienen mediante medición directa de diámetros y cálculo de superficies. Se utilizan en la determinación del volumen de trozas o fustes.

Área foliar. Cálculo a partir de correlaciones con otras variables- Para estudios fisiológicos, de transpiración, etcétera.

Área de cobertura. Es el área cubierta por la proyección de las copas sobre el terreno y sirve para medir la densidad de un bosque en fotografías aéreas.

Superficie del fuste. Poco utilizada pero que puede tener mayor importancia en el futuro.

Área de laminado. Se da este nombre al área de la hoja de chapa que se obtiene al someter a las trozas a un proceso de desenrollado en tornos de plantas de chapa y madera contrachapada (**Figura 63**). La superficie del área de laminado será igual al ancho por la longitud de la lámina:

$$A_L = L * b$$

La longitud de la lámina a obtener se calcula con la siguiente expresión:

$$L = \frac{\pi}{4g} (D_1 - D_2)^2$$

En la cual:

L = Longitud de la lámina.

b = Ancho de la lámina = Longitud de la troza.

g = grosor de la lámina.

D_1 = Diámetro de la troza.

D_2 = Diámetro residual de la troza después del desenrollado.

2.3.3 Otros Procedimientos para la Determinación de Áreas.

🌲 Planímetros.

🌲 Plantillas de cuadrículas o puntos.

🌲 Peso del plano recortado en papel especial.

🌲 Planímetros fotoeléctricos.

🌲 Trazo de figuras geométricas.

🌲 Prismas ópticos.

🌲 Relascopios.

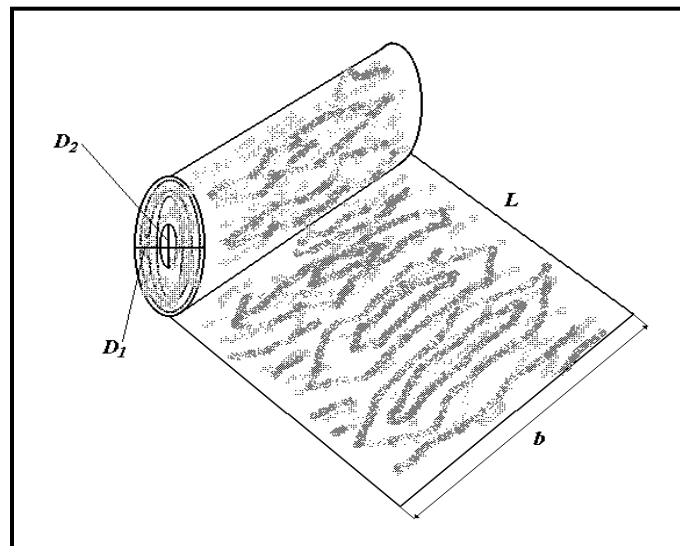


Figura 63. Proceso de obtención de chapa de madera; área de laminado.

2.4 Medición de la Corteza.

Para conocer el diámetro o calcular el área de una sección que permita cubicar el volumen de madera sin la corteza es necesario, en primera instancia, conocer el grosor de ésta.

En trozas, en las secciones que tienen una cara expuesta la medición no presenta dificultad; sin embargo, en secciones cuya superficie no queda expuesta la

medición es más problemática. Para estos casos se utilizan instrumentos a los que se ha dado el nombre de medidores de corteza existiendo diversos tipos y modelos de ellos (**Figura 64**).

Un medidor de corteza consiste en una varilla metálica con la punta filosa y truncada que tiene una canaladura en el vástago. Sobre el vástago está inscrita una escala y sobre él se desliza un índice que permite hacer la lectura en la escala (**Figura 65**).

La punta de la varilla es truncada en un lado para permitir que penetre en la corteza pero no en la madera y es así como se realiza la medición.

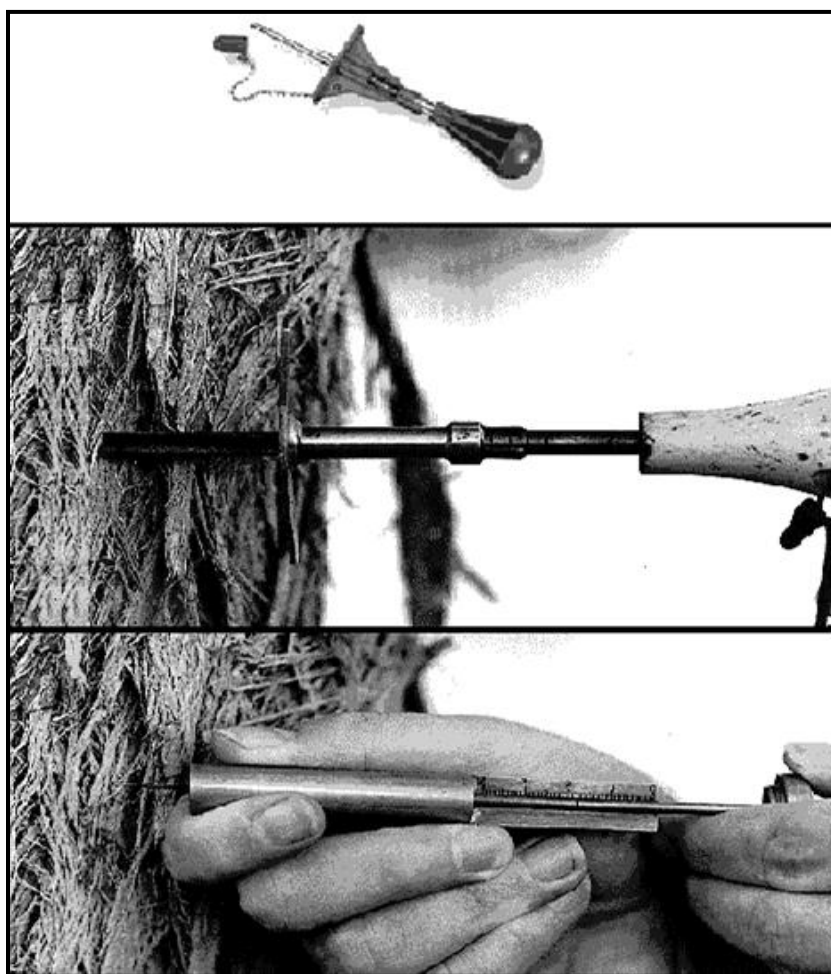


Figura 64. Diferentes tipos de medidores de corteza.

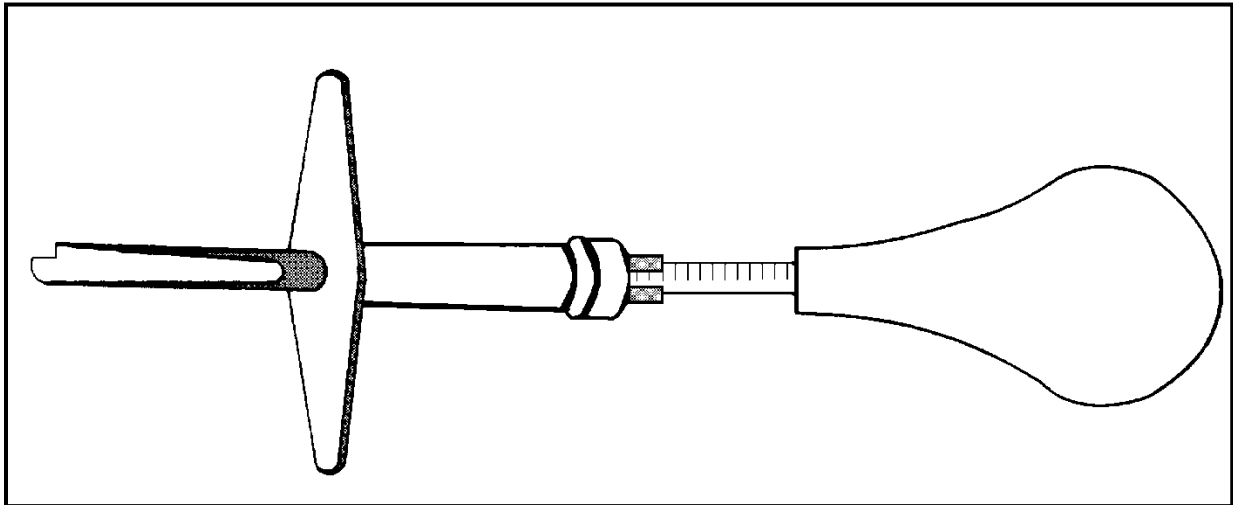


Figura 65. Medidor de corteza.

Al hacer la medición de corteza debe tenerse en cuenta que la medida es radial, por lo que el diámetro sin corteza es igual al diámetro con corteza, menos dos veces el grosor de ésta:

$$d_{sc} = d_{cc} - 2b$$

En la expresión anterior:

d_{cc} = diámetro con corteza.

d_{sc} = diámetro sin corteza.

b = grosor de la corteza.

En árboles en pie, en terrenos con pendiente, la medición del grosor de la corteza (al igual que la del diámetro normal), debe hacerse por el lado de arriba de la pendiente, a 1.30 m y perpendicular al eje del árbol.

3 Cubicación de Árboles y de Productos Primarios.

3.1 Tipos Dendrométricos.

Los troncos de los árboles cuyo crecimiento no ha sido perturbado por causas exteriores tienden a tomar una forma regular o simétrica, de tal modo que su eje resulta sensiblemente rectilíneo, su sección transversal más o menos circular y en su conjunto pueden asemejarse a cuerpos geométricos generados por la rotación de una línea alrededor de un eje situado en el mismo plano.

Conocida la ecuación de esta línea generatriz, resulta fácil determinar el volumen del tronco o fuste de que se trate. Sin embargo, la forma de los troncos está sujeta a una gran cantidad de factores y varía no sólo de una especie a otra sino dentro de la misma especie; en estas condiciones el procedimiento de cubicación señalado anteriormente resulta de escasa utilidad.

No obstante lo anterior, la experiencia nos ha enseñado que si la forma de los troncos es tan variable y difícil de traducir en ecuaciones sencillas y de utilidad práctica cuando se les considera en toda su longitud, es más constante y sencilla refiriéndola a porciones pequeñas de los mismos, las cuales pueden asimilarse con mayor o menor exactitud, según el caso, a formas geométricas perfectamente definidas, cuyo volumen es de fácil determinación.

Se llaman, en consecuencia, **tipos dendrométricos** a los cuerpos geométricos que se asemejan a los troncos o fustes de los árboles para determinar su volumen.

Naturalmente estos troncos o fustes nunca tienen la forma de un cuerpo geométrico perfecto, pero a pesar de ello en muchos casos se recurre a los tipos dendrométricos para investigar el volumen de los troncos.

Los tipos dendrométricos que en la práctica se asemejan a los troncos de los árboles para proceder a su cubicación son cuerpos geométricos generados por la rotación de una línea sobre su eje. No siendo posible definir geoméricamente la forma de dicha línea generatriz se ha convenido en atribuirle la forma de una parábola, como una manera sencilla de efectuar los cálculos que se proponen, cuya ecuación general referida al eje en torno al que gira y a la perpendicular trazada por su vértice es:

$$y^2 = Ax^n$$

Ecuación general de las parábolas

En esta ecuación, para los tipos dendrométricos clásicos, n es un número entero y positivo que define la forma del cuerpo de que se trata; A es el parámetro de forma, o sea una cantidad constante e invariable; x e y son las coordenadas.

En esta hipótesis el volumen de cualesquiera de los tipos dendrométricos generados con valores x e y de esta ecuación, comprendidos entre el vértice de la línea generatriz y un plano perpendicular al eje de dicha línea, situado a la distancia x , será el de un paraboloides de revolución. Consideraremos, para fines de ejemplificación e ilustración, una parábola de Apolonio como la línea generatriz; al girar esta línea en torno al eje de las X , genera un paraboloides de revolución (**Figura 66**).

El volumen de este paraboloides de revolución, en el cual S_0 es el área de la sección transversal circular determinada por el plano perpendicular al eje x , e y el radio de la misma, será:

$$v = \int_0^x \pi y^2 \delta x$$

En donde: $\pi y^2 = S_0$

El signo de la integral significa suma; 0 y x son los límites que deben considerarse, 0 el origen y x (h) la distancia a que está el plano perpendicular al eje; πy^2 siendo y el radio de una sección circular es igual al área del círculo S_0 , y δx es la altura o equidistancia entre las secciones perpendiculares al eje X practicadas en un cuerpo geométrico de revolución.

Se denota que el producto de πy^2 por δx es el volumen de una pequeña tajada. El cilindro tiene en su base circular un radio y ; si este cuerpo se divide en tajadas del mismo espesor, siendo el espesor igual a δx , entonces el producto de $\pi y^2 \delta x$ es el volumen de una tajada al que llamaremos $v_{\delta x}$; el volumen de todo el cuerpo resulta de la suma de los volúmenes de todas las tajadas en que se haya dividido el cuerpo. Esto es lo que indica la integral, o sea la suma de todas las tajadas en que está dividido el cuerpo (**Figura 67**).

$$v = \int_0^x \pi y^2 \delta x$$

Como $y^2 = A x^n$

$$v = \int_0^x \pi A x^n \delta x$$

$$v = \pi A \int_0^x x^n \delta x$$

$$\int_0^x x^n \delta x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

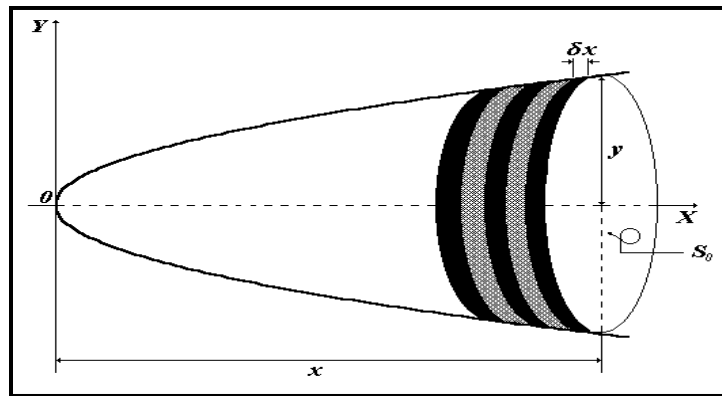


Figura 66. Paraboloido de revolución cortado por planos a distancias δx , lo que genera segmentos con grosor δx y radios y .

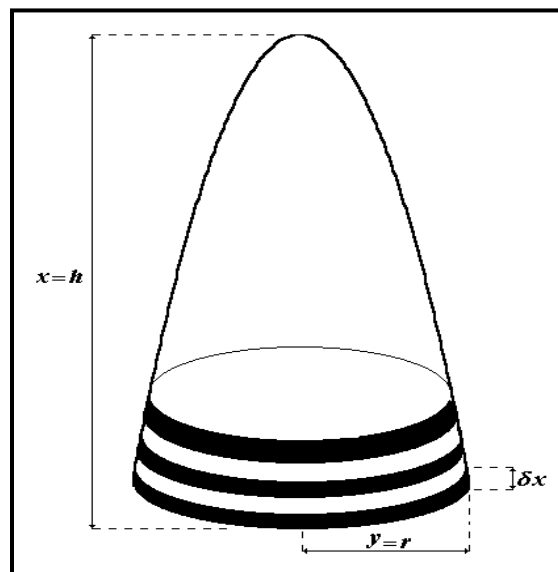


Figura 67. Segmentos de alturas δx y de radios y en un paraboloido de revolución de altura total h y diámetro de la base igual a r .

Y nos queda:
$$v = \pi A \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{\pi A x^{n+1}}{n+1}$$

Como
$$x^{n+1} = x^n * x :$$

$$v = \frac{\pi A x^n x}{n+1}$$

Recordando que: $y^2 = A x^n$

$$v = \frac{\pi y^2 x}{n+1}$$

$$v = \frac{S_0 x}{n+1} ; \text{y como } x = h_0, \text{ nos queda:}$$

$$v = \frac{S_0 h_0}{n+1} \quad \text{Fórmula general para determinar el volumen de los paraboloides de revolución.}$$

La asignación de valores de “n” de 0 a 3, en la ecuación general de las parábolas y la graficación de una serie de valores de x e y obtenidos a partir de ella, nos genera diferentes parábolas (**Figura 68**), las cuales, al rotar en torno al eje de las “X” generan los siguientes paraboloides de revolución conocidos como tipos dendrométricos.

Valor de “n”	Paraboloide de revolución
0	Cilindro
1	Paraboloide apolónico
2	Cono
3	Neiloide

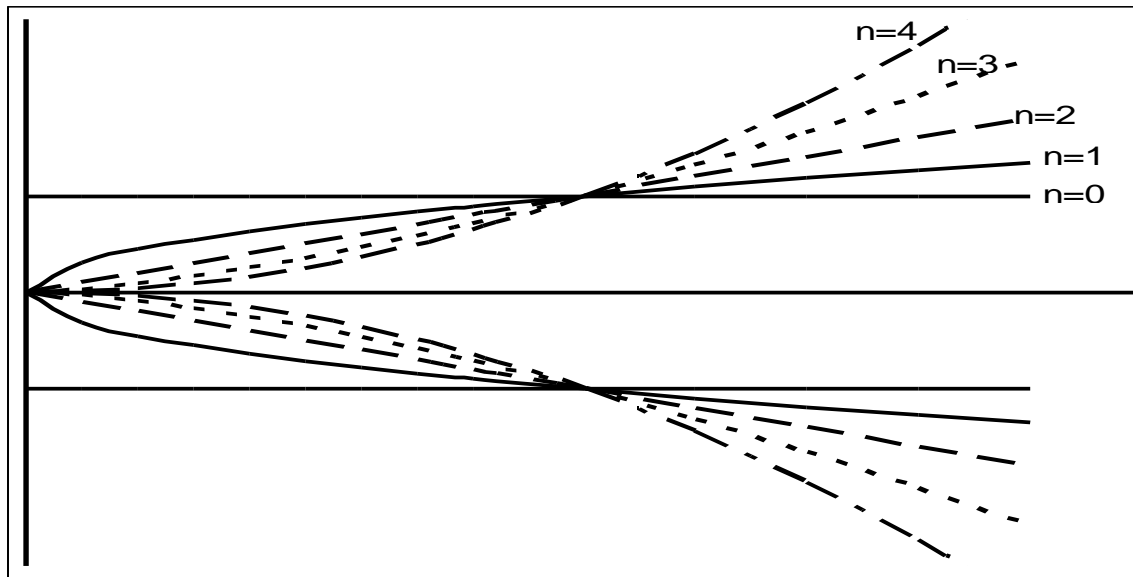


Figura 68. Parábolas generadas al graficar valores x e y obtenidos con diferentes valores del exponente “ n ”.

Los fustes de los árboles normalmente no adoptan la forma de un tipo dendrométrico en toda su longitud, pero es posible identificar a éstos o a sus truncados, en segmentos del fuste (**Figura 69**).

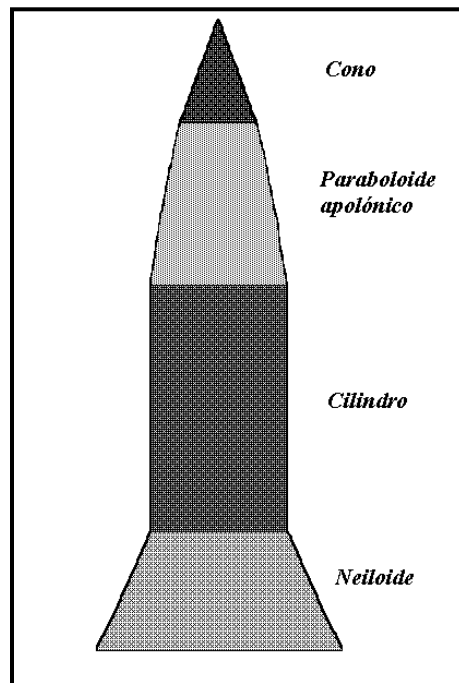


Figura 69. Identificación de los diferentes tipos dendrométricos o de sus truncados en el fuste de un árbol.

3.1.1 Cilindro.

Cuando $n = 0$, la ecuación de la línea generatriz nos da $y^2 = A x^0 = A$. Esta ecuación corresponde a un sistema de dos rectas paralelas (ab y cd), equidistantes del eje X , que al girar sobre él generan un cilindro de revolución, cuyo volumen podemos obtenerlo aplicando la fórmula general, siendo $x = h$ la distancia entre el eje Y , y un plano que corta al cuerpo a dicha distancia (**Figura 70**).

$$v_c = \frac{S_0 h_0}{0 + 1} = S_0 h_0$$

O sea el producto de la superficie de la base por la altura.

$$v_c = S_0 h_0 \quad \text{Fórmula para determinar el volumen del cilindro.}$$

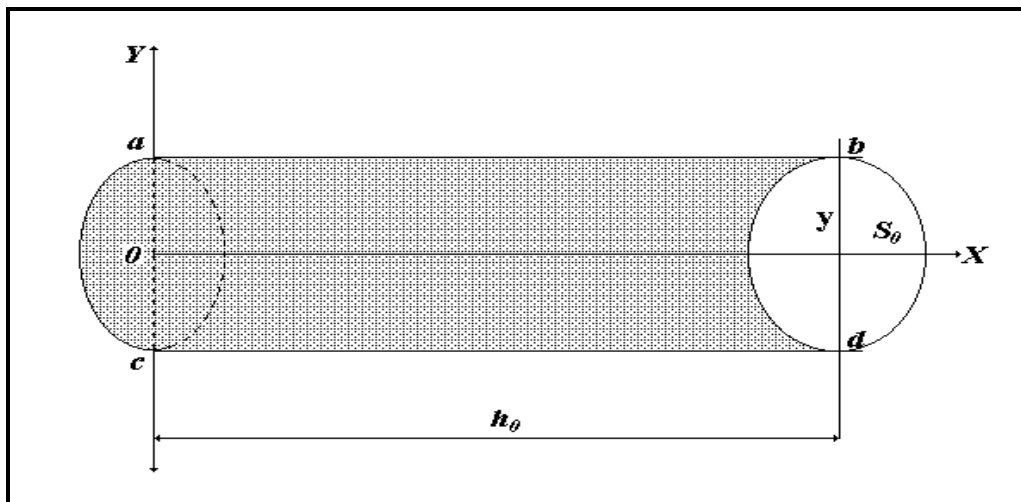


Figura 70. Cilindro.

3.1.2 Paraboloide Apolónico.

En el caso de que $n = 1$, la ecuación de la línea generatriz será $y^2 = Ax$, que corresponde a la “parábola de Apolonio”, la cual al girar sobre su eje engendra un cuerpo que se conoce como paraboloide apolónico (**Figura 71**).

Este cuerpo se caracteriza por la proporcionalidad existente entre las áreas de sus secciones rectas y sus distancias al vértice O , de tal manera que:

$$\frac{h_0}{S_0} = \frac{h_1}{S_1}$$

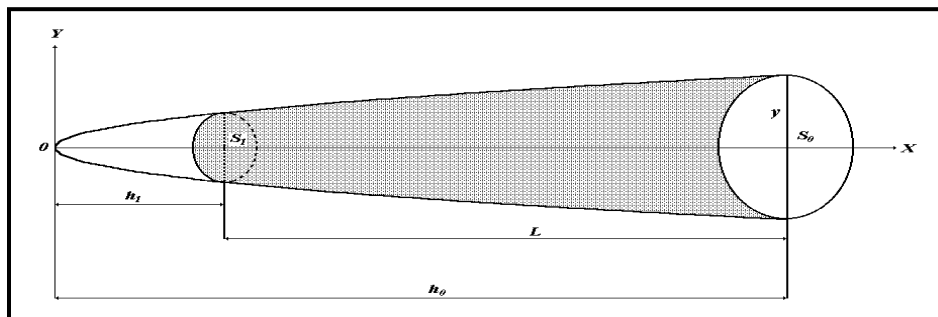


Figura 71. Paraboloide apolónico.

La propiedad de proporcionalidad citada se demuestra multiplicando los dos miembros de la ecuación de la línea generatriz del paraboloide apolónico por π .

$$\pi y^2 = \pi A x$$

y = radio de la sección transversal.

$\pi y A$ = constantes.

$x = h$.

De esta manera podemos establecer que la superficie de la sección transversal (πy^2) del paraboloide apolónico es igual al producto de la altura ($x = h$) por una constante:

$$S = K x = K h \quad \text{y} \quad \frac{1}{K} = \frac{h}{S}$$

En nuestra figura:

$$\frac{1}{K} = \frac{h_0}{S_0} = \frac{h_1}{S_1}$$

Si en la anterior igualdad expresamos los valores de S en función de sus radios tenemos:

$$\frac{h_0}{\pi r_0^2} = \frac{h_1}{\pi r_1^2} \quad \text{quedando} \quad \frac{h_0}{r_0^2} = \frac{h_1}{r_1^2}$$

El volumen de este cuerpo, al igual que el del cilindro, se obtiene aplicando la fórmula general de cubicación de los paraboloides de revolución sustituyendo el valor de n .

$$v_{pa} = \frac{S_0 h_0}{1+1}$$

$$v_{pa} = \frac{S_0 h_0}{2}$$

Fórmula para determinar el volumen del paraboloide apolónico.

La fórmula nos indica que el volumen del paraboloide apolónico es igual a la mitad del volumen del cilindro de la misma base y altura.

De la figura anterior podemos determinar que el volumen del truncado de paraboloide apolónico de bases paralelas entre sí y perpendicular al eje es igual al volumen del paraboloide grande menos el del paraboloide chico:

$$v_{Tpa} = \frac{S_0 h_0}{2} - \frac{S_1 h_1}{2} = \frac{S_0 h_0 - S_1 h_1}{2}$$

En la **Figura 71** podemos observar que a h_0 y h_1 las podemos determinar en función de L con lo que tendremos:

$$h_0 = L + h_1 \quad y \quad h_1 = h_0 - L$$

$$v_{Tpa} = \frac{S_0 (L + h_1) - S_1 (h_0 - L)}{2}$$

$$v_{Tpa} = \frac{S_0 L + S_0 h_1 - S_1 h_0 + S_1 L}{2}$$

Como: $\frac{h_0}{S_0} = \frac{h_1}{S_1} \therefore S_1 h_0 = S_0 h_1$ y en la expresión del volumen del truncado de paraboloide estos valores tienen signos contrarios, nos queda:

$$v_{Tpa} = \frac{S_0 L + S_1 L}{2} \quad y \quad v_{Tpa} = \frac{(S_0 + S_1) * L}{2}$$

Con base en la proporcionalidad existente, la semisuma de las bases es igual a la sección media por lo que podemos consignar que el volumen del truncado de paraboloides apolónico también se puede determinar con la expresión $v_{Tpa} = S_m h_0$

$$v_{Tpa} = \frac{(S_0 + S_1) * L}{2}$$

$$v_{Tpa} = S_m L$$

Fórmulas para determinar el volumen del truncado de paraboloides apolónico

3.1.3 Cono.

Suponiendo ahora que $n = 2$, la ecuación de la línea generatriz queda:

$$y^2 = A x^2$$

Esta expresión corresponde a un sistema de dos rectas que pasan por el origen y que tienen la misma pendiente. Este sistema, al girar sobre su eje genera el cono cuyo volumen se puede obtener aplicando la fórmula general de los paraboloides de revolución (**Figura 72**).

$$v_c = \frac{S_0 h_0}{2+1}$$

$$v_c = \frac{S_0 h_0}{3}$$

Fórmula para determinar el volumen del cono.

La fórmula nos indica que el volumen del cono es igual a la tercera parte del volumen del cilindro de la misma base y altura.

Este cuerpo se caracteriza porque las áreas de las secciones transversales del mismo son directamente proporcionales a los cuadrados de sus distancias al vértice:

$$\frac{h_0^2}{S_0} = \frac{h_1^2}{S_1}$$

Expresando a S_0 y S_1 en función de sus radios tendremos:

$$\frac{h_0^2}{\pi r_0^2} = \frac{h_1^2}{\pi r_1^2}$$

Eliminando a π de los dos miembros y sacando raíz cuadrada nos queda:

$$\frac{h_0}{r_0} = \frac{h_1}{r_1}$$

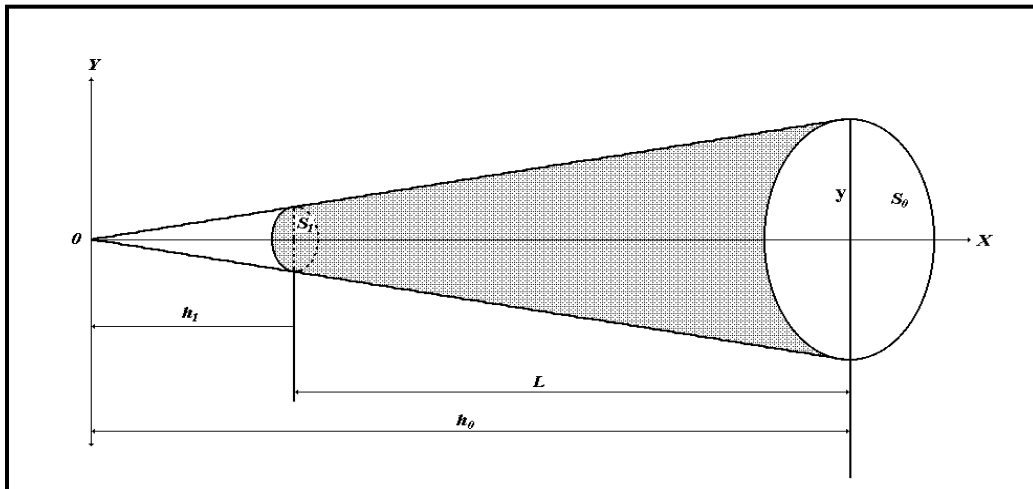


Figura 72. Cono.

Esta proporción se comprueba por la semejanza de los triángulos formados por los radios de las secciones transversales paralelas, la línea generatriz y el eje X.

El volumen del truncado de cono puede obtenerse de manera semejante al caso del paraboloides apolónico, restando el volumen del cono chico al volumen del cono grande:

$$v_{Tc} = \frac{S_0 h_0}{3} - \frac{S_1 h_1}{3}$$

$$v_{Tc} = \frac{S_0 h_0 - S_1 h_1}{3}$$

Como: $h_0 = L + h_1, h_1 = h_0 - L$

$$v_{Tc} = \frac{S_0(L+h_1) - S_1(h_0 - L)}{3}$$

$$v_{Tc} = \frac{S_0 L + S_0 h_1 - S_1 h_0 + S_1 L}{3}$$

Despejando a h_0 y a h_1 de la propiedad de proporcionalidad:

$$h_0 = \sqrt{\frac{h_1^2 S_0}{S_1}} = \frac{h_1 S_0^{1/2}}{S_1^{1/2}}$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{h_0^2 S_1}{S_0}} = \frac{h_0 S_1^{1/2}}{S_0^{1/2}}$$

Sustituyendo:

$$v_{Tc} = \frac{1}{3} \left[L(S_0 + S_1) + S_0 \frac{h_0 S_1^{1/2}}{S_0^{1/2}} - S_1 \frac{h_1 S_0^{1/2}}{S_1^{1/2}} \right]$$

$$v_{Tc} = \frac{1}{3} \left[L(S_0 + S_1) + S_0^{1/2} h_0 S_1^{1/2} - S_1^{1/2} h_1 S_0^{1/2} \right]$$

$$v_{Tccr} = \frac{1}{3} \left[L(S_0 + S_1) + S_0^{1/2} S_1^{1/2} (h_0 - h_1) \right]$$

Como: $h_0 - h_1 = L$

$$v_{Tc} = \frac{1}{3} \left[L(S_0 + S_1) + L(S_0^{1/2} S_1^{1/2}) \right]$$

$$v_{Tc} = \frac{L}{3} (S_0 + S_1 + S_0^{1/2} S_1^{1/2})$$

$$v_{Tc} = \frac{L}{3} (S_0 + S_1 + \sqrt{S_0 S_1}) \quad \text{Fórmula para determinar el volumen del truncado de cono.}$$

3.1.4 Neiloide.

Cuando $n = 3$, la ecuación de la línea generatriz nos queda $y^2 = Ax^3$, la cual, al girar sobre su eje nos genera el neiloide (**Figura 73**).

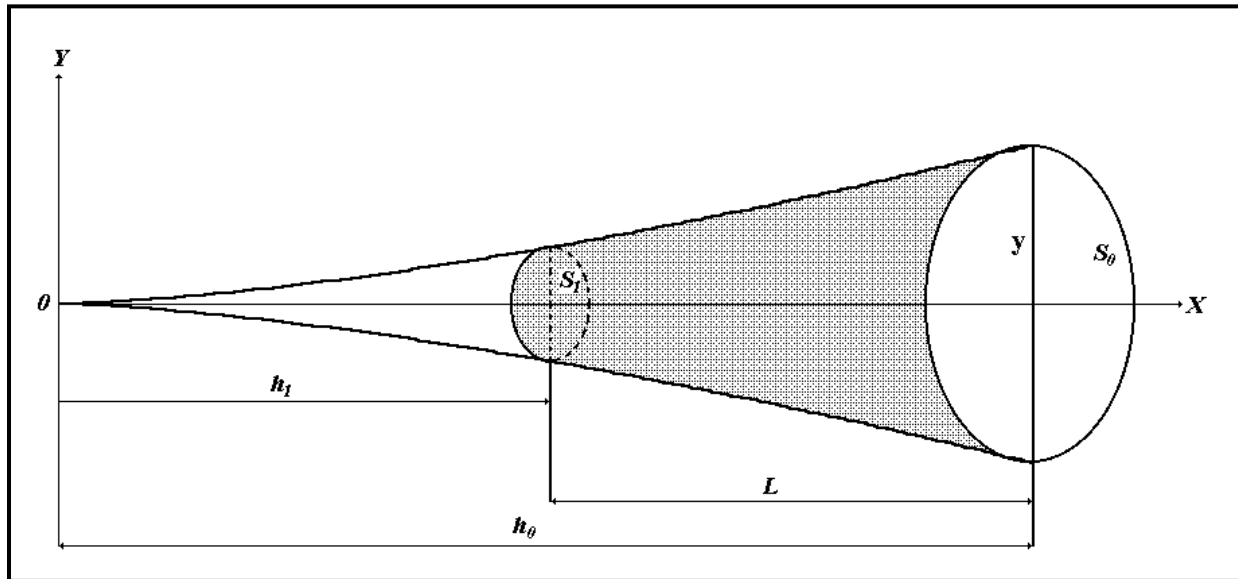


Figura 73. Neiloide.

Este cuerpo se caracteriza porque las áreas de las secciones transversales del mismo son directamente proporcionales a los cubos de sus distancias al vértice:

$$\frac{h_0^3}{S_0} = \frac{h_1^3}{S_1}$$

Esta propiedad se demuestra multiplicando los dos miembros de la ecuación de la línea generatriz del paraboloide apolónico por π

$$\pi y^2 = \pi A x^3$$

y = radio de la sección transversal.

$\pi y A$ = constantes.

$$x^3 = h^3.$$

De esta manera podemos establecer que la superficie de la sección transversal (πy^2) del neiloide es igual al producto de la altura al cubo (h^3) por una constante (πA):

$$S = K x^3 = K h^3 \quad \text{y} \quad \frac{I}{K} = \frac{h^3}{S}$$

En nuestra figura:

$$\frac{I}{K} = \frac{h_0^3}{S_0} = \frac{h_1^3}{S_1}$$

Si en la anterior igualdad expresamos los valores de S en función de sus radios tenemos:

$$\frac{h_0^3}{\pi r_0^2} = \frac{h_1^3}{\pi r_1^2} \quad \text{quedando:} \quad \frac{h_0^3}{r_0^2} = \frac{h_1^3}{r_1^2}$$

Para la obtención de la expresión que nos permite determinar el volumen de un neiloide, aplicamos la fórmula general de los paraboloides de revolución, de tal forma que el volumen de este sólido será:

$$v_n = \frac{S_0 h_0}{3 + I}$$

$$v_n = \frac{S_0 h_0}{4} \quad \text{Fórmula para determinar el volumen del neiloide.}$$

Esta expresión nos indica que el volumen del neiloide es la cuarta parte del volumen de un cilindro con la misma base y altura.

Para el volumen del truncado de neiloide, en la misma forma que para los casos anteriores, se calcula la fórmula de la siguiente manera:

$$v_{Tn} = \frac{S_0 h_0}{4} - \frac{S_1 h_1}{4}$$

$$v_{Tn} = \frac{S_0 h_0 - S_1 h_1}{4}$$

Como: $h_0 = L + h_1$
 $h_1 = h_0 - L$

$$v_{Tn} = \frac{S_0(L+h_1) - S_1(h_0 - L)}{4}$$

$$v_{Tn} = \frac{S_0 L + S_0 h_1 - S_1 h_0 + S_1 L}{4}$$

Despejando a h_0 y a h_1 de la propiedad de proporcionalidad:

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{h_1^3 S_0}{S_1}} = \frac{h_1 S_0^{1/3}}{S_1^{1/3}}$$

$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{h_0^3 S_1}{S_0}} = \frac{h_0 S_1^{1/3}}{S_0^{1/3}}$$

Sustituyendo:

$$v_{Tn} = \frac{1}{4} \left[L(S_0 + S_1) + S_0 \frac{h_0 S_1^{1/3}}{S_0^{1/3}} - S_1 \frac{h_1 S_0^{1/3}}{S_1^{1/3}} \right]$$

$$v_{Tn} = \frac{1}{4} \left[L(S_0 + S_1) + S_0^{2/3} h_0 S_1^{1/3} - S_1^{2/3} h_1 S_0^{1/3} \right]$$

Sustituyendo los valores de h_0 y h_1 :

$$v_{Tn} = \frac{1}{4} \left[L(S_0 + S_1) + S_0^{2/3} S_1^{1/3} (L+h_1) - S_0^{1/3} S_1^{2/3} (h_0 - L) \right]$$

$$v_{Tn} = \frac{1}{4} \left[L(S_0 + S_1) + S_0^{2/3} S_1^{1/3} L + S_0^{2/3} S_1^{1/3} h_1 - S_0^{1/3} S_1^{2/3} h_0 + S_0^{1/3} S_1^{2/3} L \right]$$

$$v_{Tn} = \frac{1}{4} \left[L(S_0 + S_1) + S_0^{1/3} S_1^{1/3} \left(S_0^{1/3} L + S_0^{1/3} h_1 - S_1^{1/3} h_0 + S_1^{1/3} L \right) \right]$$

De la propiedad del neiloide tenemos:

$$\frac{h_0^3}{S_0} = \frac{h_1^3}{S_1}; \quad \text{sacando raíz cúbica} \quad \frac{h_0}{S_0^{1/3}} = \frac{h_1}{S_1^{1/3}} \quad \therefore S_0^{1/3} h_1 = S_1^{1/3} h_0$$

En nuestra expresión tenemos estos valores con signos contrarios, por lo que:

$$v_{Tn} = \frac{1}{4} \left[L(S_0 + S_1) + S_0^{1/3} S_1^{1/3} (S_0^{1/3} L + S_1^{1/3} L) \right]$$

$$v_{Tn} = \frac{1}{4} \left[L(S_0 + S_1) + S_0^{1/3} S_1^{1/3} (S_0^{1/3} + S_1^{1/3}) L \right]$$

$$v_{Tn} = \frac{L}{4} \left[S_0 + S_1 + S_0^{1/3} S_1^{1/3} (S_0^{1/3} + S_1^{1/3}) \right]$$

$$v_{Tn} = \frac{L}{4} \left[S_0 + S_1 + \sqrt[3]{S_0 S_1} (\sqrt[3]{S_0} + \sqrt[3]{S_1}) \right] \quad \text{Fórmula para determinar el volumen del truncado de neiloide.}$$

La parte del árbol que generalmente tiene la forma de un truncado de neiloide es la inferior o tocón, dificultándose el cálculo de su volumen por el problema de conocer L , h_0 o h_1 .

Para trabajos en los que se requiera precisión o en trabajos de investigación tenemos que recurrir a los tipos dendrométricos para una cubicación exacta, pero en la mayoría de los casos éstas se realizan utilizando otros métodos y fórmulas.

3.2 Cubicación de Fustes y Trozas.

Tratándose de cubicaciones que requieran exactitud, los fustes o troncos de los árboles deben dividirse o suponerse divididos en trozas de igual o diferente longitud y se cubican por separado, de tal forma que la precisión de la cubicación será mayor entre menor sea la longitud de las trozas en que se divide el fuste (**Figura 74**).

Para cubicaciones comerciales de fustes o de trozas, se han ideado procedimientos más sencillos que el de la utilización de las fórmulas que nos proporcionan los volúmenes de los tipos dendrométricos o de sus truncados, con diversos grados de precisión suficientes para este tipo de operaciones, entre los que

se pueden mencionar los basados en la utilización de las fórmulas de Smalian, Huber y Newton, y los de Kuntze, Heyer o Simpson, éstas tres últimas para la determinación de volúmenes de fustes o de trozas con mayor precisión.

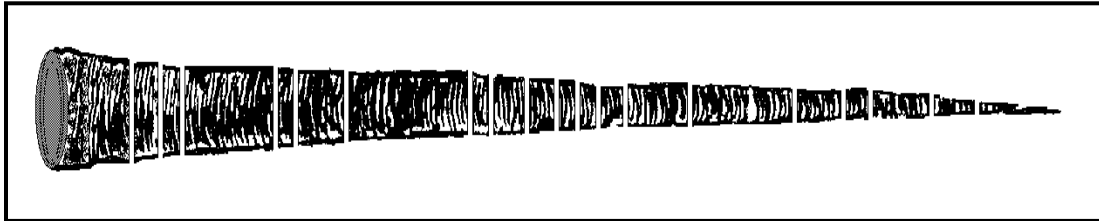


Figura 74. División de un fuste en trozas de diferente longitud para la determinación de su volumen.

3.2.1 Fórmula de Smalian.

En el procedimiento de Smalian para la cubicación comercial de fustes sin punta o trozas, se parte de las áreas de sus secciones extremas y de su longitud (**Figura 75**).

La expresión de Smalian nos indica que el volumen de un fuste o de una troza es igual al producto de la semisuma de las áreas de las secciones transversales extremas de la troza por su longitud como se indica a continuación:

$$v_s = \left(\frac{S_0 + S_l}{2} \right) * L$$

En esta fórmula se tiene que:

v_s = Volumen por Smalian.

L = Longitud del fuste o troza.

S_0 y S_l = Áreas de las secciones transversales extremas del fuste o troza.

Obvia y usualmente, para la aplicación de esta expresión se obtienen los diámetros de las secciones extremas del fuste o troza y con ellos se calculan sus áreas.

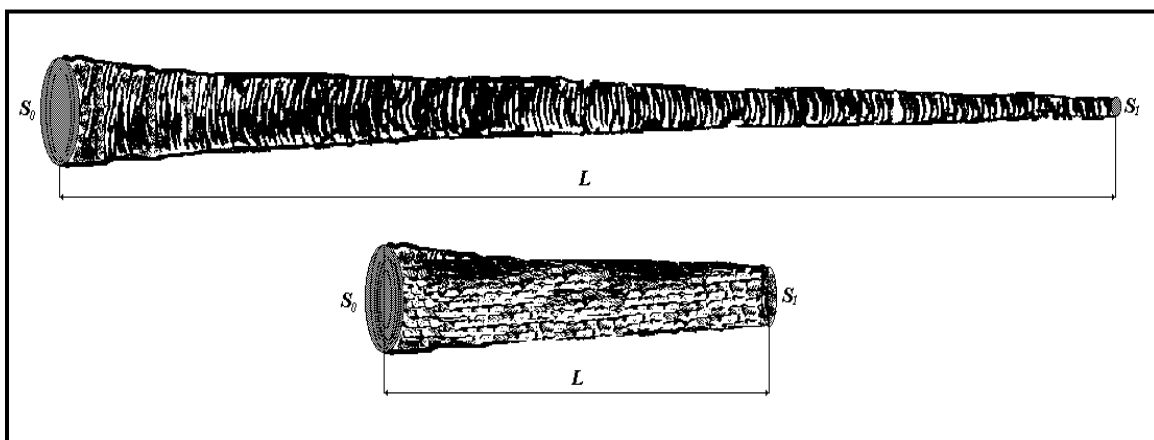


Figura 75. Dimensiones necesarias para la aplicación de la fórmula de Smalian en la determinación de volúmenes de fustes o trozas.

3.2.2 Fórmula de Huber.

De los métodos comerciales de cubicación, el de Huber es seguramente el más sencillo en cuanto al cálculo para la obtención del volumen de un fuste o troza, pues para obtenerlo sólo se requiere la determinación del área de su sección transversal media y de su longitud (**Figura 76**).

Generalmente la fórmula de Huber se expresa en la siguiente forma:

$$v_H = S_m * L$$

Fórmula de Huber para la cubicación de fustes y trozas.

En esta expresión:

v_H	=	Volumen por Huber.
S_m	=	Área de la sección transversal media.
L	=	Longitud del fuste o troza.

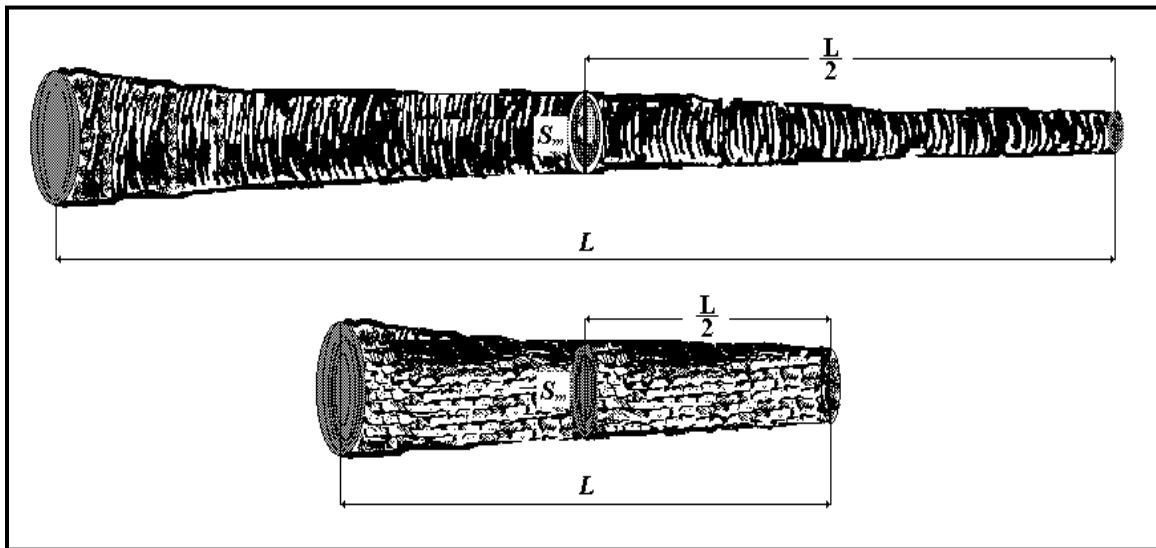


Figura 76. Dimensiones necesarias para la aplicación de la fórmula de Huber en la determinación de volúmenes de fustes o trozas.

El procedimiento da resultados bastante aceptables cuando los fustes no son muy largos y adoptan formas cilíndricas o de truncado de paraboloides apolónicos, como es lo común tratándose de coníferas de sombra (tolerantes), como el *Abies sp.*

3.2.3 Fórmula de Huber Modificada.

Una opción a la utilización de la fórmula de Huber, cuando la trocería se encuentra apilada y se hace difícil o imposible la determinación del diámetro de la sección media, es la utilización de la fórmula de Huber modificada, en la cual, se miden los diámetros (D_0 y D_1) o radios (R_0 y R_1) de las secciones extremas de las trozas (**Figura 77**), y se obtiene su media aritmética y con ésta se estima el área de la sección media de la troza.

En función de los diámetros o de los radios, las expresiones a utilizar serán las siguientes:

$$v_{HM} = \frac{\pi L}{4} \left(\frac{D_0 + D_1}{2} \right)^2$$

$$v_{HM} = \pi L \left(\frac{R_0 + R_1}{2} \right)^2$$

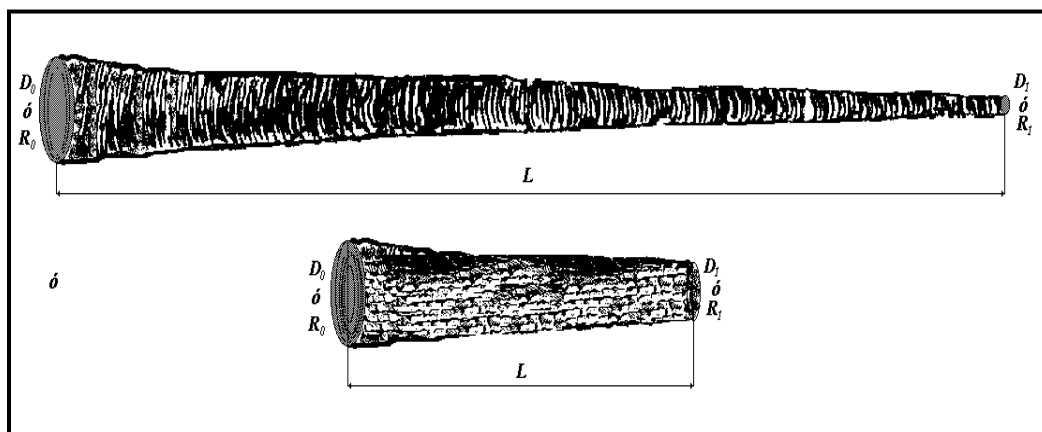


Figura 77. Dimensiones necesarias para la aplicación de la fórmula de Huber modificada en la determinación de volúmenes de fustes o trozas.

3.2.4 Fórmula de Newton.

Para la cubicación de fustes y trozas, en lugar de emplear las fórmulas de los paraboloides de revolución o de sus truncados, puede emplearse la fórmula de Newton, la cual puede aplicarse a un mayor número de cuerpos geométricos así como para fustes completos y trozas.

Esta fórmula expresa que el volumen de una troza es igual a un sexto de su longitud multiplicado por la suma del área de la sección transversal mayor más cuatro veces el área de la sección transversal media más el área de la sección transversal menor.

$$v_N = \frac{L}{6} (S_0 + 4S_m + S_1)$$

Fórmula de Newton para determinar el volumen de trozas o fustes.

En esta expresión se tiene:

v_N	=	Volumen del fuste o troza.
L	=	Longitud del fuste o troza.
S_0	=	Área de la sección transversal mayor.
S_m	=	Área de la sección transversal media.
S_1	=	Área de la sección transversal menor.

Para la deducción de la fórmula de Newton se considera una troza de longitud L muy pequeña (**Figura 78**), la cual se divide en tres segmentos iguales los cuales nos definen los puntos a , b , c y d y éstos son cortados por planos

perpendiculares al eje X , tendremos las secciones transversales S_1 , S_b , S_c y S_0 . El volumen de la primera porción (v_1), comprendida entre S_1 y S_b con una longitud de un tercio de L puede ser obtenido de la siguiente manera:

$$v_1 = \frac{S_1 + S_b}{2} * \frac{L}{3}$$

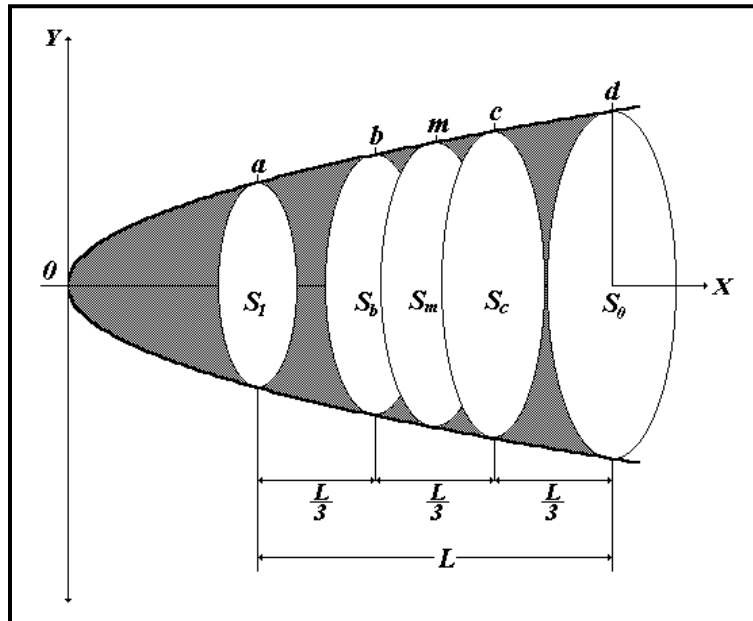


Figura 78. Obtención de la fórmula de Newton para la determinación del volumen de fustes y trozas.

El volumen del siguiente par de trozas será:

$$v_2 = \frac{S_b + S_c}{2} * \frac{L}{3}$$

Asimismo, el volumen de la última porción (v_3), comprendida entre las secciones S_c y S_0 , se puede determinar con la siguiente expresión:

$$v_3 = \frac{S_c + S_0}{2} * \frac{L}{3}$$

Al proceder de esta forma se suponen magnitudes pequeñas, de tal manera que las curvas ab y bc y cd , y sus contrapartes pueden considerarse como rectas. El

volumen de todo el cuerpo será igual a la suma de los volúmenes parciales de la siguiente manera:

$$v = v_1 + v_2 + v_3$$

$$v = \frac{L}{3} * \frac{(S_1 + S_b + S_b + S_c + S_c + S_0)}{2}$$

$$v = \frac{L}{3} * \frac{[S_0 + 2(S_b + S_c) + S_1]}{2}$$

En la **Figura 78** se puede observar que si la longitud L es muy pequeña y la distancia entre las secciones S_1 , S_b , S_c y S_0 , lo es aún más, la sección transversal S_m , que se encuentra a la mitad de la distancia entre S_b y S_c sería sensiblemente igual a ellas. Con base en esto, si hacemos que $S_b = S_m$ y $S_c = S_m$, el producto $2*(S_b + S_c)$ será igual a $4S_m$, y nuestra expresión quedaría expresada como:

$$v_N = \frac{L}{6} (S_0 + 4S_m + S_1)$$

Para utilizar esta fórmula, basta medir los diámetros de las secciones extremas de la troza, medir la longitud L de la misma y a la distancia $L/2$ medir el diámetro de lo que será la sección media S_m (**Figura 79**). Con los diámetros se obtienen las áreas de las secciones y se aplica la fórmula citada.

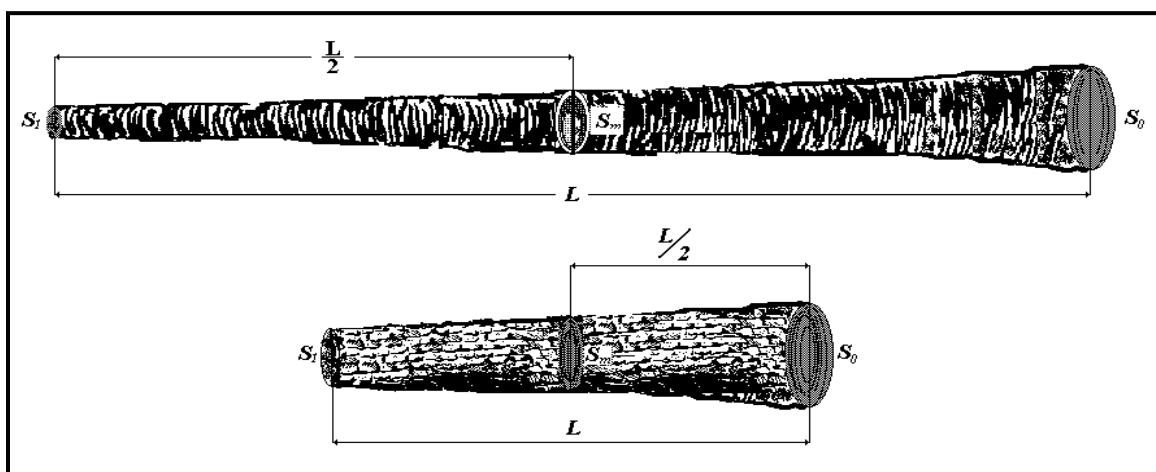


Figura 79. Aplicación de la fórmula de Newton para la determinación del volumen de trozas y fustes.

3.2.5 Fórmula de Simpson.

Una fórmula que también puede emplearse para la cubicación de fustes es la de Simpson, la cual parte de dividir al fuste que se va a cubicar en un número par n de trozas de igual longitud L y llamando a las áreas determinadas por esta división por $S_1, S_2, S_3, S_4 \dots S_{n-1}, S_n$ y S_{n+1} (Figura 80).

El volumen del primer par de trozas, empleando la fórmula de Newton, será igual a:

$$v_1 = \frac{L}{3} (S_1 + 4S_2 + S_3)$$

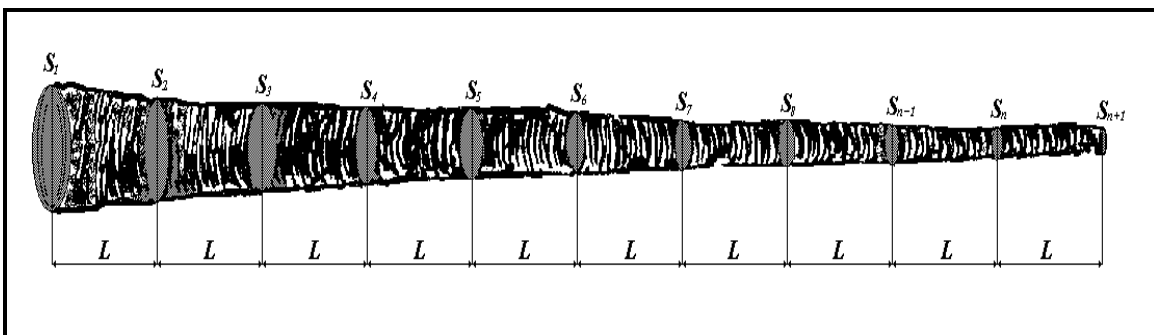


Figura 80. Fuste sin punta dividido en un número par de trozas para la aplicación de la fórmula de Simpson.

El volumen del siguiente par de trozas será:

$$v_2 = \frac{L}{3} (S_3 + 4S_4 + S_5)$$

Y para generalizar, considerando el último par de trozas:

$$v_n = \frac{L}{3} (S_{n-1} + 4S_n + S_{n+1})$$

La suma de los volúmenes parciales obtenidos da el volumen total del fuste:

$$v_T = \frac{L}{3} (S_1 + 4S_2 + S_3 + S_3 + 4S_4 + S_5 + S_{n-1} + 4S_n + S_{n+1})$$

Finalmente, la fórmula de Simpson quedará expresada en la siguiente forma:

$$v_{Simpson} = \frac{L}{3} [S_1 + S_{n+1} + 4(S_2 + S_4 + S_n) + 2(S_3 + S_5 + S_{n-1})]$$

Fórmula de Simpson para determinar el volumen de fustes divididos en un número par de trozas de igual longitud.

Al igual que en la de Newton, la precisión de esta fórmula estará determinada por la longitud de las trozas en que se ha dividido o que supuestamente se divide el fuste, de tal manera que mientras la longitud sea menor la precisión será mayor, y su aplicación estará condicionada a que se tenga un número par de trozas de igual longitud.

3.2.6 Fórmula de Heyer.

Cuando los fustes, debido a su irregularidad, no pueden dividirse en trozas de la misma longitud, se dividen en porciones de longitud diferente (**Figura 81**), de tal forma que el volumen de las distintas trozas se calcula en función del área de su sección media y de su longitud, y el del fuste por medio de la suma de los volúmenes parciales:

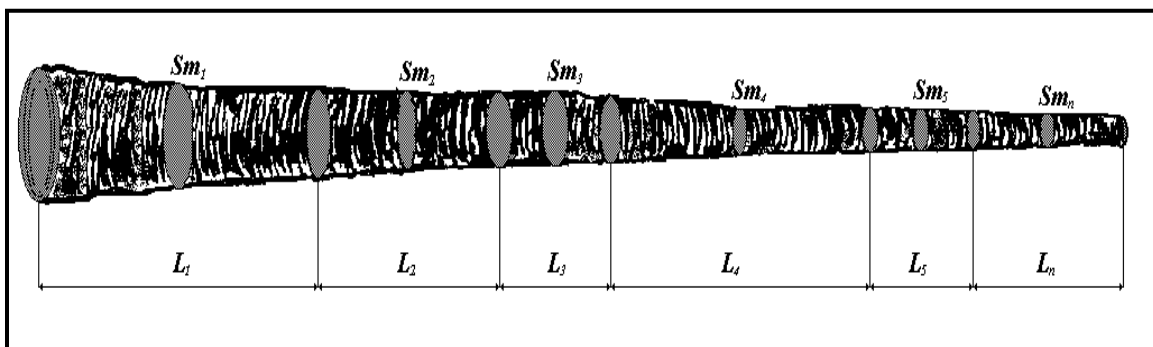


Figura 81. Fuste sin punta dividido en trozas de longitud desigual para la aplicación de la fórmula de Heyer.

$$v_{Heyer} = Sm_1L_1 + Sm_2L_2 + Sm_3L_3 + Sm_4L_4 + Sm_5L_5 + \dots Sm_nL_n$$

Fórmula de Heyer para determinar el volumen de fustes divididos en trozas de longitud desigual.

Si la longitud de las trozas es igual (**Figura 82**), la fórmula se simplifica quedando así:

$$v_{\text{Heyer}} = (Sm_1 + Sm_2 + Sm_3 + Sm_4 + \dots Sm_n) * L$$

Fórmula de Heyer para determinar el volumen de fustes divididos en trozas de igual longitud.

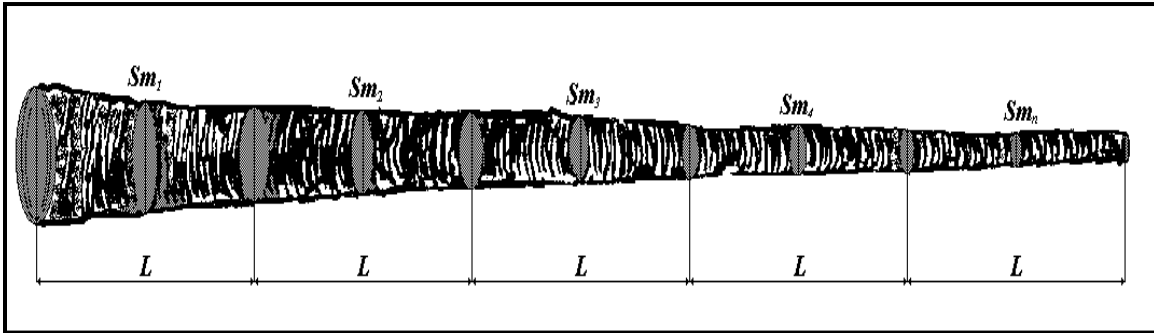


Figura 82. Fuste sin punta dividido en trozas de igual longitud para la aplicación de la fórmula de Heyer.

3.2.7 Fórmula de Kuntze.

Los fustes divididos en trozas de longitud desigual también pueden cubicarse en función de las áreas de sus secciones extremas utilizando la fórmula de Kuntze (**Figura 83**).

El volumen del fuste sería igual a la suma de los volúmenes de las trozas en que se ha dividido el fuste, utilizando la fórmula de Smalian:

$$v_K = \frac{S_1+S_2}{2} L_1 + \frac{S_2+S_3}{2} L_2 + \frac{S_3+S_4}{2} L_3 + \frac{S_4+S_{n-1}}{2} L_4 + \frac{S_{n-1}+S_n}{2} L_{n-1} + \frac{S_n+S_{n+1}}{2} L_n$$

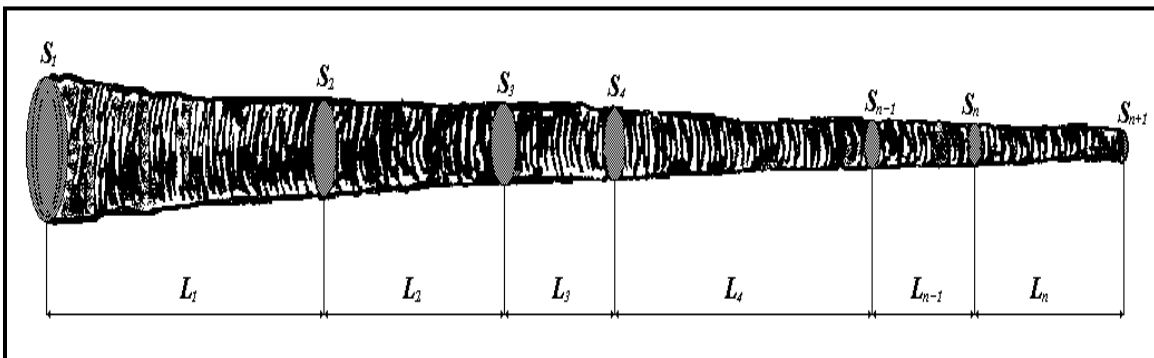


Figura 83. Fuste sin punta dividido en un número par (n) de trozas de longitud desigual para fórmula de Kuntze.

$$v_K = \frac{S_1 L_1 + S_2 L_1 + S_2 L_2 + S_3 L_2 + S_3 L_3 + S_4 L_3 + S_4 L_4 + \dots + S_{n-1} L_{n-2} + S_{n-1} L_{n-1} + S_n L_{n-1} + S_n L_n + S_{n+1} L_n}{2}$$

$$v_K = \frac{S_1 L_1 + S_{n+1} L_n + S_2 (L_1 + L_2) + S_3 (L_2 + L_3) + S_4 (L_3 + L_4) + \dots + S_{n-1} (L_{n-2} + L_{n-1}) + S_n (L_{n-1} + L_n)}{2}$$

Fórmula de Kuntze para determinar el volumen de fustes divididos en trozas de longitud desigual.

En el caso de que las trozas sean de la misma longitud (**Figura 84**), la fórmula de Kuntze quedaría expresada como a continuación se indica:

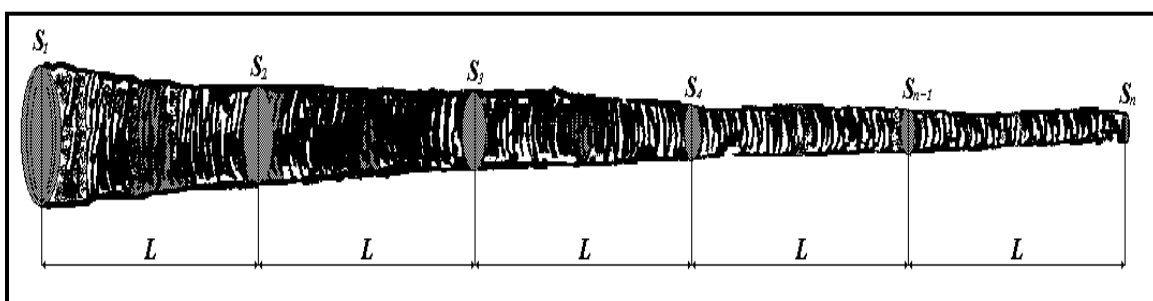


Figura 84. Fuste sin punta dividido en un número impar (n-1), de trozas de igual longitud para la aplicación de la fórmula de Kuntze.

$$v_K = \frac{S_1 + S_2}{2} L + \frac{S_2 + S_3}{2} L + \frac{S_3 + S_4}{2} L + \frac{S_4 + S_{n-1}}{2} L + \frac{S_{n-1} + S_n}{2} L$$

$$v_K = \left(\frac{S_1 + S_2 + S_2 + S_3 + S_3 + S_4 + S_4 + S_{n-1} + S_{n-1} + S_n}{2} \right) * L$$

$$v_K = \left(\frac{S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 2S_4 + 2S_{n-1} + S_n}{2} \right) * L$$

$$v_K = \left(\frac{S_1 + S_n}{2} + S_2 + S_3 + S_4 + S_{n-1} \right) * L$$

Fórmula de Kuntze para determinar el volumen de fustes divididos en trozas de igual longitud.

3.3 Resumen de Fórmulas de Cubicación

En la Tabla 2 se presenta un resumen de las fórmulas de cubicación analizadas.

Tabla 2. Fórmulas de cubicación.

Resultante de la fórmula	Fórmula
Volumen de los tipos dendrométricos y de sus truncados	
Volumen del cilindro.	$v_c = S_0 h_0$
Volumen del paraboloides apolónico.	$v_{pa} = \frac{S_0 h_0}{2}$
Volumen del truncado de paraboloides apolónico.	$v_{Tpa} = \frac{(S_0 + S_1) * L}{2}$ $v_{Tpa} = S_m L$
Volumen del cono.	$v_c = \frac{S_0 h_0}{3}$
Volumen del truncado de cono.	$v_{Tc} = \frac{L}{3} (S_0 + S_1 + \sqrt{S_0 S_1})$
Volumen del neiloide.	$v_n = \frac{S_0 h_0}{4}$
Volumen del truncado de neiloide.	$v_{Tn} = \frac{L}{4} \left[S_0 + S_1 + \sqrt[3]{S_0 S_1} (\sqrt[3]{S_0} + \sqrt[3]{S_1}) \right]$
Volumen de trozas y fustes	
Volumen de trozas y fustes por Newton	$v_N = \frac{L}{6} (S_0 + 4S_m + S_1)$
Volumen de trozas y fustes por Huber	$v_H = S_m * L$
Volumen de trozas y fustes por Huber modificada	$v_{HM} = \frac{\pi L}{4} \left(\frac{D_0 + D_1}{2} \right)^2$
Volumen de trozas y fustes por Smalian	$v_S = \left(\frac{S_0 + S_1}{2} \right) * L$
Volumen de fustes divididos en un número par de trozas de igual longitud por Simpson.	$v_{Simpson} = \frac{L}{3} [S_1 + S_{n+1} + 4(S_2 + S_4 + S_n) + 2(S_3 + S_5 + S_{n-1})]$
Fórmula de Heyer para determinar el volumen de fustes divididos en trozas de longitud desigual.	$v_{Heyer} = Sm_1 L_1 + Sm_2 L_2 + Sm_3 L_3 + Sm_4 L_4 + Sm_5 L_5 + \dots Sm_n L_n$

Tabla 2. Fórmulas de cubicación.

Resultante de la fórmula	Fórmula
Fórmula de Heyer para determinar el volumen de fustes divididos en trozas de igual longitud.	$v_{\text{Heyer}} = (Sm_1 + Sm_2 + Sm_3 + Sm_4 + \dots Sm_n) * L$
Fórmula de Kuntze para determinar el volumen de fustes divididos en trozas de longitud desigual.	$v_K = \frac{S_1 L_1 + S_n L_n + S_2 (L_1 + L_2) + S_3 (L_2 + L_3) + S_4 (L_3 + L_4) + \dots + S_{n-1} (L_{n-2} + L_{n-1}) + S_n (L_{n-1} + L_n)}{2}$
Fórmula de Kuntze para determinar el volumen de fustes divididos en trozas de igual longitud.	$v_K = \left(\frac{S_1 + S_n}{2} + S_2 + S_3 + S_4 + S_{n-1} \right) * L$

3.4 Precisión en la Cubicación.

El grado de precisión en la cubicación de fustes apeados por los procedimientos generales estudiados depende fundamentalmente de la medida en que los fustes se parezcan a los tipos dendrométricos. Para esto, conviene tener presente que el eje de los fustes no siempre es rectilíneo, aunque puede tomarse como tal el de porciones pequeñas de los mismos, debido a que su radio de curvatura es muy grande.

Por otra parte, los fustes o trozos no tienen en la práctica la forma de los tipos dendrométricos en los que se basa su cubicación, cometándose por este motivo un error cuya magnitud varía con la longitud del fuste o de las trozas, disminuyendo a medida que la longitud es más pequeña.

Por último, hay que tomar en cuenta que la forma de los fustes y de las trozas no permanece constante en toda su longitud sino que varía de un punto a otro de los mismos; esta variación se reduce a medida que la longitud de las trozas es más pequeña.

Así pues, el grado de precisión en la cubicación que se detalla depende fundamentalmente de la longitud de las trozas en que se divide el fuste, el cual es mayor a medida que disminuye la longitud de dichas trozas.

Asimismo, la precisión en la cubicación dependerá de la fórmula que se utilice en la determinación del volumen, por lo que adquiere importancia la determinación de los errores que se cometen al cubicar trozas que se asimilan a los diferentes truncados con las diferentes expresiones que se han revisado.

La magnitud de dichos errores se puede determinar efectuando una comparación por diferencia entre las expresiones ortodoxas de los volúmenes de los truncados con las expresiones que se utilizan en la práctica.

Para poder realizar esta comparación por diferencia, en virtud de que en algunas de las fórmulas operativas se utiliza el área de la sección media de las trozas, se hace necesaria la determinación de ésta, o de su radio, para cada truncado, en función de las áreas o de los radios de las secciones extremas.

3.4.1 Determinación de la Sección Media de los Diferentes Truncados en Función de las Secciones Extremas.

Si a cualquier paraboloides de revolución se le corta por dos planos paralelos al eje de las Y , se tendrá un truncado de paraboloides de longitud L , en el cual los planos de corte nos definirán las secciones extremas del mismo S_0 y S_1 . Si a este truncado lo cortamos por un plano a la mitad de su longitud, este plano de corte nos definirá la sección media S_m (Figura 85).

Generadas estas secciones y las longitudes (h_1 , h_m y h_0) de los paraboloides que éstas definen, se tiene que la altura del paraboloides mediano h_m , es igual a:

$$h_m = h_0 - \frac{L}{2}$$

$$h_m = h_0 - \frac{h_0 - h_1}{2}$$

$$h_m = \frac{2h_0 - h_0 + h_1}{2}$$

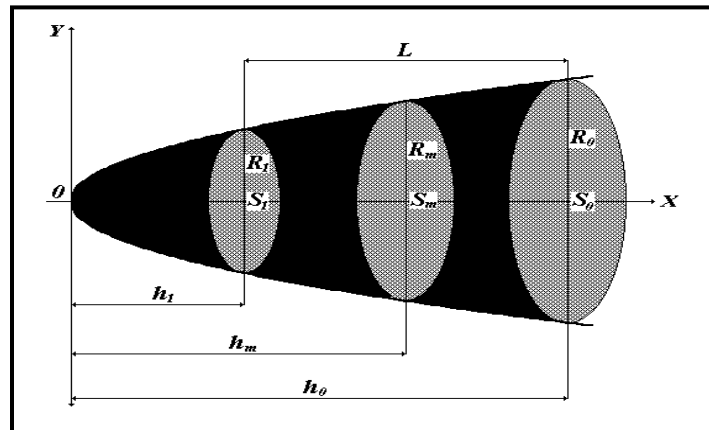


Figura 85. Secciones transversales menor (S_1), media (S_m) y mayor (S_0) de un truncado de paraboloides.

De esta manera, la altura del paraboloides mediano (h_m), o lo que es lo mismo, la distancia del vértice a la sección transversal media (S_m), en función de las alturas de los otros dos paraboloides será igual a:

$$h_m = \frac{h_0 + h_1}{2}$$

3.4.1.1 En el paraboloides apolónico.

Como se ha visto, la ecuación de la parábola de Apolonio que al rotar sobre su eje genera el paraboloides apolónico es:

$$y^2 = Ax$$

En el sólido de revolución generado, cualquier “ y ” es el radio de la sección transversal correspondiente y cualquier “ x ” es la altura o distancia desde el vértice a dicha sección por lo que se puede escribir que:

$$R_0^2 = Ah_0$$

$$R_1^2 = Ah_1$$

$$R_m^2 = Ah_m$$

Sustituyendo el valor de h_m por su valor en función de h_0 y h_1 , se tiene:

$$R_m^2 = A \left(\frac{h_0 + h_1}{2} \right)$$

$$R_m^2 = \frac{Ah_0 + Ah_1}{2}$$

Como $R_0^2 = Ah_0$ y $R_1^2 = Ah_1$:

$$R_m^2 = \frac{R_0^2 + R_1^2}{2} \quad y$$

$$R_m = \sqrt{\frac{R_0^2 + R_1^2}{2}}$$

Con base en la expresión anterior, se puede afirmar que el radio de la sección media de un truncado de paraboloides apolónico es igual a la media cuadrática de los radios de las secciones extremas.

3.4.1.2 En el cono.

La ecuación de la recta inclinada que al rotar sobre su eje genera un cono:

$$y^2 = Ax^2$$

En el sólido de revolución generado, cualquier “y” es el radio de la sección transversal correspondiente y cualquier “x” es la altura o distancia desde el vértice a dicha sección por lo que se puede escribir que:

$$R_0^2 = Ah_0^2 \quad y \quad R_0 = A^{\frac{1}{2}} h_0$$

$$R_1^2 = Ah_1^2 \quad y \quad R_1 = A^{\frac{1}{2}} h_1$$

$$R_m^2 = Ah_m^2 \quad y \quad R_m = A^{\frac{1}{2}} h_m$$

Sustituyendo el valor de h_m por su valor en función de h_0 y h_1 , se tiene:

$$R_m^2 = A \left(\frac{h_0 + h_1}{2} \right)^2$$

$$R_m^2 = \left(\frac{A^{\frac{1}{2}} h_0 + A^{\frac{1}{2}} h_1}{2} \right)^2$$

Como $R_0 = A^{\frac{1}{2}} h_0$ y $R_1 = A^{\frac{1}{2}} h_1$

$$R_m^2 = \left(\frac{R_0 + R_1}{2} \right)^2 \quad y$$

$$R_m = \frac{R_0 + R_1}{2}$$

Esto nos indica que el radio de la sección media de un truncado de cono es igual a la media aritmética de los radios de las secciones extremas.

3.4.1.3 En el neiloide.

La ecuación de la parábola de Neil que al rotar sobre su eje genera un neiloide es:

$$y^2 = A x^3$$

En el sólido de revolución generado, cualquier “y” es el radio de la sección transversal correspondiente y cualquier “x” es la altura o distancia desde el vértice a dicha sección por lo que se puede escribir que:

$$R_0^2 = A h_0^3 \quad y \quad R_0^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{1}{3}} h_0$$

$$R_1^2 = A h_1^3 \quad y \quad R_1^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{1}{3}} h_1$$

$$R_m^2 = A h_m^3 \quad y \quad R_m^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{1}{3}} h_m$$

Sustituyendo el valor de h_m por su valor en función de h_0 y h_1 , se tiene:

$$R_m^2 = A \left(\frac{h_0 + h_1}{2} \right)^3$$

$$R_m^2 = \left(\frac{A^{\frac{1}{3}} h_0 + A^{\frac{1}{3}} h_1}{2} \right)^3$$

Como $R_0^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{1}{3}} h_0$ y $R_1^{\frac{2}{3}} = A^{\frac{1}{3}} h_1$:

$$R_m^2 = \left(\frac{R_0^{\frac{2}{3}} + R_1^{\frac{2}{3}}}{2} \right)^3 \quad R_m^2 = \frac{R_0^2 + 3R_0^{\frac{4}{3}}R_1^{\frac{2}{3}} + 3R_0^{\frac{2}{3}}R_1^{\frac{4}{3}} + R_1^2}{8}$$

El cuadrado del radio de la sección media de un truncado de neiloide es igual al cubo de la semisuma de la raíz cúbica de los cuadrados de los radios de las secciones extremas.

3.4.2 Errores al Determinar el Volumen de Truncados de los Diferentes Tipos Dendrométricos con las Fórmulas Operativas.

Para poder efectuar la comparación de los volúmenes que arrojan las fórmulas de los diferentes truncados de paraboloides con las fórmulas operativas, Smalian, Huber, Huber modificada y Newton, es necesario expresar a todas ellas en función de sus radios.

a) Volumen del truncado de paraboloide apolónico.

$$v_{Tpa} = \frac{(S_0 + S_1) * L}{2} = \frac{\pi L}{2} (R_0^2 + R_1^2)$$

$$v_{Tpa} = S_m * L = \pi LR_m^2$$

b) Volumen del truncado de cono.

$$v_{Tc} = \frac{L}{3} (S_0 + S_1 + \sqrt{S_0 S_1}) = \frac{\pi L}{3} (R_0^2 + R_1^2 + R_0 R_1)$$

c) Volumen del truncado de neiloide.

$$v_{Tn} = \frac{L}{4} \left[S_0 + S_1 + \sqrt[3]{S_0 S_1} (\sqrt[3]{S_0} + \sqrt[3]{S_1}) \right] = \frac{\pi L}{4} \left[R_0^2 + R_1^2 + R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} \left(R_0^{\frac{2}{3}} + R_1^{\frac{2}{3}} \right) \right]$$

d) Volumen de Smalian.

$$v_S = \frac{L}{2}(S_0 + S_1) = \frac{\pi L}{2}(R_0^2 + R_1^2)$$

e) **Volumen de Huber.**

$$v_H = S_m * L = \pi L R_m^2$$

f) **Volumen de Huber modificada.**

$$v_{HM} = \pi L \left(\frac{R_0 + R_1}{2} \right)^2 = \frac{\pi L}{4} (R_0^2 + 2R_0R_1 + R_1^2)$$

g) **Volumen de Newton.**

$$v_N = \frac{L}{6} (S_0 + 4S_m + S_1) = \frac{\pi L}{6} (R_0^2 + 4R_m^2 + R_1^2)$$

3.4.2.1 Errores al determinar el volumen de un truncado de paraboloides apolónico.

3.4.2.1.1 Volumen del truncado de paraboloides apolónico vs. Smalian.

Al cubicar una troza con forma de truncado de paraboloides apolónico con la fórmula de Smalian, el error que se comete es igual a cero debido a que ambas expresiones son iguales:

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_S} = v_{Tpa} - v_S$$

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_S} = \frac{L}{2}(S_0 + S_1) - \frac{L}{2}(S_0 + S_1)$$

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_S} = 0$$

Error que se comete al cubicar una troza con forma de truncado de paraboloides apolónico con la fórmula de Smalian.

3.4.2.1.2 Volumen del truncado de paraboloides apolónicas vs. Huber.

De la misma manera que en el caso de la fórmula de Smalian, al calcular una troza con forma de truncado de paraboloides apolónicas con la fórmula de Huber, el error que se comete es igual a cero en virtud de que la fórmula de Huber es igual a la de dicho truncado expresada en función de la sección transversal media.

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_H} = v_{Tpa} - v_H$$

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_H} = (S_m * L) - (S_m * L)$$

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_H} = 0$$

Error que se comete al calcular una troza con forma de truncado de paraboloides apolónicas con la fórmula de Huber.

3.4.2.1.3 Volumen del truncado de paraboloides apolónicas vs. Huber modificada.

Para efectuar la comparación por diferencia entre las expresiones que nos dan el volumen del truncado de paraboloides apolónicas y el volumen por la fórmula de Huber modificada, recurriremos a dichas expresiones dadas en función de los radios de las secciones transversales.

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_{HM}} = v_{Tpa} - v_{HM}$$

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_{HM}} = \frac{\pi L}{2} (R_0^2 + R_1^2) - \pi L \left(\frac{R_0 + R_1}{2} \right)^2$$

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_{HM}} = \frac{\pi L}{2} (R_0^2 + R_1^2) - \frac{\pi L}{4} (R_0^2 + 2R_0R_1 + R_1^2)$$

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_{HM}} = \frac{\pi L}{4} (2R_0^2 + 2R_1^2 - R_0^2 - 2R_0R_1 - R_1^2)$$

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_{HM}} = \frac{\pi L}{4} (R_0^2 - 2R_0R_1 + R_1^2)$$

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_{HM}} = \frac{\pi L}{4} (R_0 - R_1)^2$$

Error que se comete al cubicar una troza con forma de troncado de paraboloides apolónico con la fórmula de Huber modificada.

La magnitud y signo positivo de este error (ya que $R_0 > R_1$) nos indica que el volumen que da la fórmula de Huber modificada es menor que el volumen real de una troza con forma de troncado de paraboloides apolónico; es decir, esta fórmula da un error por defecto ya que subestima el volumen de la troza.

3.4.2.1.4 Volumen del troncado de paraboloides apolónico vs. Newton.

Comparemos por diferencia la fórmula que nos da el volumen de un troncado de paraboloides con la fórmula de Newton utilizando las expresiones en función de los radios de las secciones extremas y media.

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_N} = v_{Tpa} - v_N$$

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_N} = \frac{\pi L}{2} (R_0^2 + R_1^2) - \frac{\pi L}{6} (R_0^2 + 4R_m^2 + R_1^2)$$

Sacando como factor común a $\frac{\pi L}{6}$ y sustituyendo el valor de R_m^2 obtenido en el punto 3.3.1.1 tendremos:

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_N} = \frac{\pi L}{6} \left[3R_0^2 + 3R_1^2 - R_0^2 - 4 \left(\frac{R_0^2 + R_1^2}{2} \right) - R_1^2 \right]$$

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_N} = \frac{\pi L}{6} (3R_0^2 + 3R_1^2 - R_0^2 - 2R_0^2 - 2R_1^2 - R_1^2)$$

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_N} = \frac{\pi L}{6} (3R_0^2 + 3R_1^2 - 3R_0^2 - 3R_1^2)$$

$$\varepsilon_{v_{Tpa}-v_N} = 0$$

Error que se comete al cubicar una troza con forma de truncado de paraboloides apolónico con la fórmula de Newton.

Mediante esta comparación se observa que al determinar el volumen de una troza con forma de truncado de paraboloides apolónico con la fórmula de Newton el error que se comete es cero.

3.4.2.2 Errores al determinar el volumen de un truncado de cono.

3.4.2.2.1 Volumen del truncado de cono vs. Smalian.

Si le restamos a la fórmula que nos da el volumen real de un truncado de cono la fórmula de Smalian, ambas expresadas en función de los radios de sus secciones transversales, tendremos:

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_S} = v_{Tc} - v_S$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_S} = \frac{\pi L}{3} (R_0^2 + R_1^2 + R_0 R_1) - \frac{\pi L}{2} (R_0^2 + R_1^2)$$

Si sacamos a $\frac{\pi L}{6}$ como factor común nos queda:

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_S} = \frac{\pi L}{6} (2R_0^2 + 2R_1^2 + 2R_0 R_1 - 3R_0^2 - 3R_1^2)$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_S} = \frac{\pi L}{6} (-R_0^2 - R_1^2 + 2R_0 R_1)$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_S} = -\frac{\pi L}{6} (R_0^2 + R_1^2 - 2R_0 R_1)$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_s} = -\frac{\pi L}{6}(R_0 - R_1)^2$$

Error que se comete al cubicar una troza con forma de truncado de cono con la fórmula de Smalian.

Al determinar el volumen de una troza con forma de truncado de cono circular recto con la fórmula de Smalian se comete un error por exceso, lo cual es indicado por el signo negativo del resultado, es decir, Smalian arroja un volumen mayor que el real de la troza; sobreestima su volumen.

3.4.2.2 Volumen del truncado de cono vs. Huber.

El error que se comete al determinar el volumen de una troza o fuste con forma de truncado de cono con la fórmula de Huber lo obtenemos mediante la diferencia entre la fórmula que nos da el volumen real y la de Huber:

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_H} = v_{Tc} - v_H$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_H} = \frac{\pi L}{3}(R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1) - \pi R_m^2 L$$

Sustituyendo el valor del radio de la sección media por su igual en función de los radios de las secciones extremas obtenido anteriormente, tendremos:

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_H} = \frac{\pi L}{3}(R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1) - \pi L \left(\frac{R_0 + R_1}{2} \right)^2$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_H} = \frac{\pi L}{3}(R_0^2 + R_1^2 + R_0R_1) - \frac{\pi L}{4}(R_0^2 + 2R_0R_1 + R_1^2)$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_H} = \frac{\pi L}{12}(4R_0^2 + 4R_1^2 + 4R_0R_1 - 3R_0^2 - 6R_0R_1 - 3R_1^2)$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_H} = \frac{\pi L}{12}(R_0^2 + R_1^2 - 2R_0R_1)$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_H} = \frac{\pi L}{12} (R_0 - R_1)^2$$

Error que se comete al cubicar una troza con forma de truncado de cono con la fórmula de Huber.

Analizando esta expresión nos percatamos que el error que se comete con Huber es por defecto, es decir, la fórmula de Huber arroja un volumen menor que el real. También se puede observar que el error con Huber es exactamente la mitad del que se comete con Smalian, aunque de signo contrario.

3.4.2.2.3 Volumen del truncado de cono vs. Huber modificada.

Comparando por diferencia la fórmula que nos da el volumen real de un truncado de cono con la fórmula de Huber, ambas expresadas en función de los radios de las secciones transversales utilizadas, tendremos:

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_{HM}} = v_{Tc} - v_{HM}$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_{HM}} = \frac{\pi L}{3} (R_0^2 + R_1^2 + R_0 R_1) - \pi L \left(\frac{R_0 + R_1}{2} \right)^2$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_{HM}} = \frac{\pi L}{3} (R_0^2 + R_1^2 + R_0 R_1) - \frac{\pi L}{4} (R_0^2 + 2R_0 R_1 + R_1^2)$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_{HM}} = \frac{\pi L}{12} (4R_0^2 + 4R_1^2 + 4R_0 R_1 - 3R_0^2 - 6R_0 R_1 - 3R_1^2)$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_{HM}} = \frac{\pi L}{12} (R_0^2 + R_1^2 - 2R_0 R_1)$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_{HM}} = \frac{\pi L}{12} (R_0 - R_1)^2$$

Error que se comete al cubicar una troza con forma de truncado de cono con la fórmula de Huber modificada.

En el caso de la fórmula de Huber modificada, el error al cubicar una troza o fuste con forma de truncado de cono es exactamente igual al que se comete con la fórmula de Huber, debido a que en este cuerpo el radio de la sección media es igual a la media aritmética de los radios de las secciones extremas el cual es utilizado en la fórmula de Huber modificada.

3.4.2.2.4 Volumen del truncado de cono vs. Newton.

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_N} = v_{Tc} - v_N$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_N} = \frac{\pi L}{3} (R_0^2 + R_1^2 + R_0 R_1) - \frac{\pi L}{6} (R_0^2 + 4R_m^2 + R_1^2)$$

En este truncado el valor del radio de la sección media es igual a la media aritmética de los radios de las secciones extremas; sustituyendo dicho valor en la expresión anterior tenemos:

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_N} = \frac{\pi L}{3} (R_0^2 + R_1^2 + R_0 R_1) - \frac{\pi L}{6} \left(R_0^2 + 4 \left(\frac{R_0 + R_1}{2} \right)^2 + R_1^2 \right)$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_N} = \frac{\pi L}{3} (R_0^2 + R_1^2 + R_0 R_1) - \frac{\pi L}{6} (R_0^2 + R_0^2 + 2R_0 R_1 + R_1^2 + R_1^2)$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_N} = \frac{\pi L}{3} (R_0^2 + R_1^2 + R_0 R_1) - \frac{\pi L}{6} (2R_0^2 + 2R_0 R_1 + 2R_1^2)$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_N} = \frac{\pi L}{6} (2R_0^2 + 2R_1^2 + 2R_0 R_1 - 2R_0^2 - 2R_0 R_1 - 2R_1^2)$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_N} = \frac{\pi L}{6} (0)$$

$$\varepsilon_{v_{Tc}-v_N} = 0$$

Error que se comete al cubicar una troza con forma de truncado de cono con la fórmula de Newton.

Al comparar por diferencia estos dos volúmenes el resultado es cero, lo que indica que la fórmula de Newton aplicada a truncados de cono arroja un volumen igual al que se obtendría aplicando la fórmula del volumen de ese truncado o sea que el no se cometería ningún error.

3.4.2.3 Errores al determinar el volumen de un truncado de neiloide.

3.4.2.3.1 Volumen del truncado de neiloide vs. Smalian.

El volumen real de un truncado de neiloide nos lo daría la expresión:

$$v_{Tn} = \frac{\pi L}{4} \left[R_0^2 + R_1^2 + R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} \left(R_0^{\frac{2}{3}} + R_1^{\frac{2}{3}} \right) \right]$$

El volumen del mismo cuerpo empleando la fórmula de Smalian se obtendría con la siguiente expresión:

$$v_S = \frac{\pi L}{2} (R_0^2 + R_1^2)$$

Al comparar por diferencia estas dos expresiones tendríamos el error que se comete al emplear la fórmula de Smalian para cubicar trozas o fustes con forma de truncado de neiloide:

$$\mathcal{E}_{v_{Tn}-v_S} = v_{Tn} - v_S$$

$$\mathcal{E}_{v_{Tn}-v_S} = \frac{\pi L}{4} \left[R_0^2 + R_1^2 + R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} \left(R_0^{\frac{2}{3}} + R_1^{\frac{2}{3}} \right) \right] - \frac{\pi L}{2} (R_0^2 + R_1^2)$$

$$\mathcal{E}_{v_{Tn}-v_S} = \frac{\pi L}{4} \left[R_0^2 + R_1^2 + R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} \left(R_0^{\frac{2}{3}} + R_1^{\frac{2}{3}} \right) - 2R_0^2 - 2R_1^2 \right]$$

$$\mathcal{E}_{v_{Tn}-v_S} = -\frac{\pi L}{4} \left[R_0^2 + R_1^2 - R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} \left(R_0^{\frac{2}{3}} + R_1^{\frac{2}{3}} \right) \right]$$

$$\varepsilon_{v_{Tn}-v_S} = -\frac{\pi L}{4} \left(R_0^2 + R_1^2 - R_0^{\frac{4}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} - R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{4}{3}} \right)$$

Error que se comete al cubicar una troza con forma de truncado de neiloide con la fórmula de Smalian.

Al cubicar una troza o fuste con forma de truncado de neiloide con la fórmula de Smalian se tendrá un error por exceso; el volumen que dará la fórmula de Smalian será mayor que el volumen real de la troza, es decir, sobreestimaré el volumen.

3.4.2.3.2 Volumen del truncado de neiloide vs. Huber.

Si restamos de la expresión que nos da el volumen real de un truncado de neiloide la fórmula de Huber, tendremos el error que se comete al cubicar trozas o fustes de este tipo con dicha fórmula:

$$\varepsilon_{v_{Tn}-v_H} = v_{Tn} - v_H$$

$$\varepsilon_{v_{Tn}-v_H} = \frac{\pi L}{4} \left[R_0^2 + R_1^2 + R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} \left(R_0^{\frac{2}{3}} + R_1^{\frac{2}{3}} \right) \right] - \pi L R_m^2$$

Sustituyendo en esta expresión el valor del radio de la sección media por su igual en función de los radios de las secciones extremas para este tipo de truncados, tendremos:

$$\varepsilon_{v_{Tn}-v_H} = \frac{\pi L}{4} \left(R_0^2 + R_1^2 + R_0^{\frac{4}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} + R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{4}{3}} \right) - \pi L \left(\frac{R_0^2 + 3R_0^{\frac{4}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} + 3R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{4}{3}} + R_1^2}{8} \right)$$

$$\varepsilon_{v_{Tn}-v_H} = \frac{\pi L}{8} \left(2R_0^2 + 2R_1^2 + 2R_0^{\frac{4}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} + 2R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{4}{3}} - R_0^2 - 3R_0^{\frac{4}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} - 3R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{4}{3}} - R_1^2 \right)$$

$$\varepsilon_{v_{Tn}-v_H} = \frac{\pi L}{8} \left(R_0^2 + R_1^2 - R_0^{\frac{4}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} - R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{4}{3}} \right)$$

$$\varepsilon_{v_{Tn}-v_H} = \frac{\pi L}{8} \left[R_0^2 + R_1^2 - R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} \left(R_0^{\frac{2}{3}} + R_1^{\frac{2}{3}} \right) \right]$$

Error que se comete al cubicar una troza con forma de truncado de neiloide con la fórmula de Huber.

Si analizamos estas expresiones podremos observar que el error que se comete con Huber es por defecto, es decir, Huber proporciona un volumen menor que el volumen real de la troza. Asimismo, se observará que la magnitud de este error es la mitad del error que se comete con Smalian, aunque esta última es por exceso.

3.4.2.3.3 Volumen del truncado de neiloide vs. Huber modificada.

Comparando por diferencia la fórmula que nos da el volumen real de un truncado de neiloide con la fórmula de Huber modificada, ambas expresadas en función de los radios de las secciones transversales utilizadas, tendremos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{v_{Tn}-v_{HM}} &= v_{Tn} - v_{HM} \\ \varepsilon_{v_{Tn}-v_{HM}} &= \frac{\pi L}{4} \left[R_0^2 + R_1^2 + R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} \left(R_0^{\frac{2}{3}} + R_1^{\frac{2}{3}} \right) \right] - \frac{\pi L}{4} (R_0^2 + 2R_0R_1 + R_1^2) \\ \varepsilon_{v_{Tn}-v_{HM}} &= \frac{\pi L}{4} \left(R_0^2 + R_1^2 + R_0^{\frac{4}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} + R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{4}{3}} - R_0^2 - 2R_0R_1 - R_1^2 \right) \\ \varepsilon_{v_{Tn}-v_{HM}} &= \frac{\pi L}{4} \left(R_0^{\frac{4}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} + R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{4}{3}} - 2R_0R_1 \right) \\ \varepsilon_{v_{Tn}-v_{HM}} &= \frac{\pi L}{4} \left[R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} \left(R_0^{\frac{2}{3}} + R_1^{\frac{2}{3}} - 2R_0^{\frac{1}{3}} R_1^{\frac{1}{3}} \right) \right] \\ \varepsilon_{v_{Tn}-v_{HM}} &= \frac{\pi L}{4} \left[R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} \left(R_0^{\frac{1}{3}} - R_1^{\frac{1}{3}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Error que se comete al cubicar una troza con forma de truncado de neiloide con la fórmula de Huber modificada.

El error que se comete con la fórmula de Huber modificada es por defecto; Huber modificada subestima el volumen de trozas o fustes con forma de truncado de neiloide.

3.4.2.3.4 Volumen del truncado de neiloide vs. Newton.

Si comparamos por diferencia la fórmula que nos da el volumen de un truncado de neiloide con la fórmula de Newton utilizando las expresiones en función de los radios de las secciones extremas y media, tendremos:

$$\varepsilon_{v_{Tn}-v_N} = v_{Tn} - v_N$$

$$\varepsilon_{v_{Tn}-v_N} = \frac{\pi L}{4} \left[R_0^2 + R_1^2 + R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} \left(R_0^{\frac{2}{3}} + R_1^{\frac{2}{3}} \right) \right] - \frac{\pi L}{6} \left(R_0^2 + 4R_m^2 + R_1^2 \right)$$

Como se ha visto, el radio de la sección media en los truncados de neiloide en función de los radios de las secciones extremas es igual a:

$$R_m^2 = \frac{R_0^2 + 3R_0^{\frac{4}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} + 3R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{4}{3}} + R_1^2}{8}$$

Sustituyendo dicho valor en la comparación de las dos expresiones, tendremos:

$$\varepsilon_{v_{Tn}-v_N} = \frac{\pi L}{4} \left(R_0^2 + R_1^2 + R_0^{\frac{4}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} + R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{4}{3}} \right) - \frac{\pi L}{6} \left[R_0^2 + 4 \left(\frac{R_0^2 + 3R_0^{\frac{4}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} + 3R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{4}{3}} + R_1^2}{8} \right) + R_1^2 \right]$$

$$\varepsilon_{v_{Tn}-v_N} = \frac{\pi L}{4} \left(R_0^2 + R_1^2 + R_0^{\frac{4}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} + R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{4}{3}} \right) - \frac{\pi L}{6} \left[R_0^2 + \left(\frac{R_0^2 + 3R_0^{\frac{4}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} + 3R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{4}{3}} + R_1^2}{2} \right) + R_1^2 \right]$$

$$\varepsilon_{v_{Tn}-v_N} = \frac{\pi L}{12} \left\{ \left(3R_0^2 + 3R_1^2 + 3R_0^{\frac{4}{3}}R_1^{\frac{2}{3}} + 3R_0^{\frac{2}{3}}R_1^{\frac{4}{3}} \right) - \left[2R_0^2 + 2 \left(\frac{R_0^2 + 3R_0^{\frac{4}{3}}R_1^{\frac{2}{3}} + 3R_0^{\frac{2}{3}}R_1^{\frac{4}{3}} + R_1^2}{2} \right) + 2R_1^2 \right] \right\}$$

$$\varepsilon_{v_{Tn}-v_N} = \frac{\pi L}{12} \left(3R_0^2 + 3R_1^2 + 3R_0^{\frac{4}{3}}R_1^{\frac{2}{3}} + 3R_0^{\frac{2}{3}}R_1^{\frac{4}{3}} - 3R_0^2 - 3R_0^{\frac{4}{3}}R_1^{\frac{2}{3}} - 3R_0^{\frac{2}{3}}R_1^{\frac{4}{3}} - 3R_1^2 \right)$$

$$\varepsilon_{v_{Tn}-v_N} = \frac{\pi L}{12} (0)$$

$$\varepsilon_{v_{Tn}-v_N} = 0$$

Error que se comete al cubicar una troza con forma de truncado de neiloide con la fórmula de Newton.

De la misma forma que para los truncados de paraboloides apolónicos y de cono circular recto, en el caso del truncado de neiloide la fórmula de Newton da un error igual a cero. Con base en esto se puede decir que dicha fórmula es aplicable a cualquier truncado de paraboloides de revolución arrojando resultados iguales que si para cada caso se utilizase la fórmula correspondiente.

3.4.2.4 Resumen de errores.

Resumiendo, los errores que se cometen al aplicar las fórmulas de Smalian, Huber, Huber modificada y Newton a trozas con forma de truncado de los diferentes tipos dendrométricos se muestran en la **Tabla 3**:

Analizando el valor de los errores que se cometen al utilizar las fórmulas de Smalian, Huber, Huber modificada y Newton en la determinación de los volúmenes de trozas con forma de los diferentes truncados de los tipos dendrométricos, se puede concluir que operativamente es innecesario utilizar las fórmulas de los truncados por la dificultad de definir el tipo a que corresponde cada troza y el trabajo extra que significa aplicar diferentes fórmulas en la determinación de volúmenes, amén de que algunas de ellas son complicadas en su aplicación.

Tabla 3. Errores en la determinación de volúmenes.

Error al usar la fórmula de:	Para cubicar el truncado de paraboloides
-------------------------------------	---

	apolónico
Smalian	$\mathcal{E}_{v_{Tpa}-v_S} = 0$
Huber	$\mathcal{E}_{v_{Tpa}-v_H} = 0$
Huber modificada	$\mathcal{E}_{v_{Tpa}-v_{HM}} = \frac{\pi L}{4} (R_0 - R_1)^2$
Newton	$\mathcal{E}_{v_{Tpa}-v_N} = 0$
Para cubicar el truncado de cono	
Smalian	$\mathcal{E}_{v_{Tc}-v_S} = -\frac{\pi L}{6} (R_0 - R_1)^2$
Huber	$\mathcal{E}_{v_{Tc}-v_H} = \frac{\pi L}{12} (R_0 - R_1)^2$
Huber modificada	$\mathcal{E}_{v_{Tc}-v_{HM}} = \frac{\pi L}{12} (R_0 - R_1)^2$
Newton	$\mathcal{E}_{v_{Tc}-v_N} = 0$
Para cubicar el truncado de neiloide	
Smalian	$\mathcal{E}_{v_{Tn}-v_S} = -\frac{\pi L}{4} \left[R_0^2 + R_1^2 - R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} * \left(R_0^{\frac{2}{3}} + R_1^{\frac{2}{3}} \right) \right]$
Huber	$\mathcal{E}_{v_{Tn}-v_H} = \frac{\pi L}{8} \left[R_0^2 + R_1^2 - R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} * \left(R_0^{\frac{2}{3}} + R_1^{\frac{2}{3}} \right) \right]$
Huber modificada	$\mathcal{E}_{v_{Tn}-v_{HM}} = \frac{\pi L}{4} \left[R_0^{\frac{2}{3}} R_1^{\frac{2}{3}} * \left(R_0^{\frac{1}{3}} - R_1^{\frac{1}{3}} \right)^2 \right]$
Newton	$\mathcal{E}_{v_{Tn}-v_N} = 0$

Asimismo, se puede concluir que la fórmula de Newton sustituye con ventaja las fórmulas de los truncados ya que al aplicarla, cualquiera que sea el tipo a que pertenezca no se comete error en la determinación del volumen. La aplicación de la fórmula de Newton requiere de más trabajo que las otras fórmulas que generalmente se utilizan en las operaciones técnicas o comerciales debido a que demanda la medición de tres diámetros, los de las secciones transversales extremas de la troza y el de la sección media, dificultándose la determinación de esta última en apilamientos de trocería. Si bien operativamente se tendrían algunas

dificultades en su utilización, esta fórmula debería usarse indefectiblemente en trabajos de investigación.

Ante la dificultad, imposibilidad o negativa a usar la fórmula de Newton en la determinación del volumen de trozas o fustes, con base en los errores que arrojan las diferentes expresiones, debería usarse la fórmula de Huber por su sencillez y porque proporciona resultados bastante adecuados para las cubicaciones comerciales ya que los errores que se cometen con ella, excluyendo a los de Newton, son los menores ya que si la comparamos con Smalian, en todos los tipos de truncados, son iguales a un medio de los que se cometen con ésta.

La dificultad que tiene la aplicación de la fórmula de Huber es la ubicación rápida en longitud, del punto medio de la troza para la medición del diámetro de la sección media o la imposibilidad de su medición en trocería apilada. Como una opción que resuelve estos problemas, se tiene la fórmula de Huber modificada, la cual demanda la medición de los diámetros de las secciones extremas de la troza o fuste, la estimación, mediante la obtención de la media aritmética de éstos, del diámetro de la sección media y con ella y la longitud, el volumen. Con esta fórmula se cometería un error en el caso de trozas o fustes con forma de truncado de paraboloides apolónicos igual a $\frac{\pi L}{12}(R_0 - R_1)^2$ que no se comete con Smalian ni con Huber; en el caso de los truncados de cono y de neiloide el error cometido es menor que con Smalian.

Finalmente, la fórmula de Smalian es la menos recomendable en la determinación del volumen de trozas cualquiera que sea el tipo de truncado a que pertenezcan, dando resultados adecuados en el caso de que se tenga la seguridad de que las trozas tienen o se asimilan a truncados de paraboloides apolónicos.

Las fórmulas revisadas son de aplicabilidad tanto para fustes como para trozas; en el caso de fustes las fórmulas de Simpson, Heyer y Kuntze son formas ampliadas de los procedimientos de Newton, Huber y Smalian; si bien las de estos últimos pueden aplicarse a fustes, su grado de precisión es reducido, razón por la cual se recomiendan para trozas y las primeras a fustes completos.

3.5 Coeficientes Mórficos.

Un indicador numérico de la forma de los fustes de los árboles es el coeficiente mórfico, entendiéndose como tal a la relación existente entre el volumen real de un fuste y el volumen de un cuerpo geométrico convencional que

puede ser el cilindro, el paraboloides apolónico, el cono, etc., de la misma base que el área basal del árbol y de su misma altura (**Figura 86**).

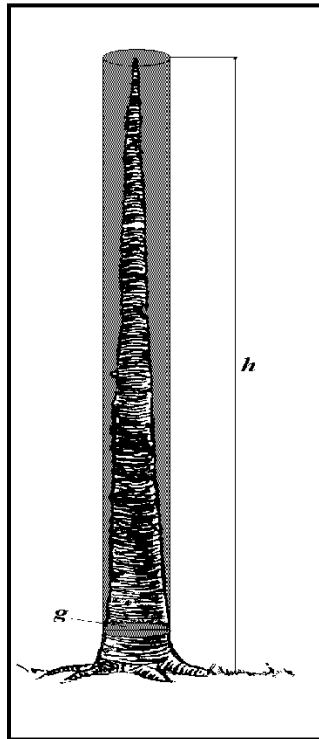


Figura 86. Base de cálculo del coeficiente mórfico.

El valor del coeficiente mórfico se expresa así:

$$CM = \frac{VR}{VC}$$

CM = Coeficiente mórfico.

VR = Volumen real del árbol.

VC = Volumen del cilindro con área de la base igual al área basal del árbol e igual altura.

Usualmente, al calcular los coeficientes mórficos, se toma como denominador el volumen del cilindro calculado en función del diámetro normal y de la altura del árbol, y como numerador el volumen del árbol determinado por cualquiera de los procedimientos recomendados para dar las cubicaciones exactas. Conocidos estos dos volúmenes es fácil el cálculo del coeficiente mórfico.

Los coeficientes mórficos pueden referirse al fuste únicamente o al árbol completo (fuste y copa), aunque los más comúnmente usados son los que se refieren únicamente al fuste.

El valor de estos coeficientes mórficos, tratándose de fustes, generalmente es menor que la unidad. Conociendo el coeficiente mórfico de un fuste, su volumen se determina fácilmente multiplicando el volumen del cilindro de la misma longitud que el fuste y de base igual a la sección del fuste a 1.30 m, por el coeficiente mórfico.

$$VR = VC * CM$$

Cuando para una zona se dispone de una tabla de coeficientes mórficos para los árboles de diferentes diámetros, agrupados por clases diamétricas, para determinar el volumen de éstos basta multiplicar simplemente el volumen del cilindro de base igual al área basal del árbol, y de la misma altura que éste, por el coeficiente mórfico de la categoría diamétrica correspondiente. Las tablas de coeficientes mórficos pueden construirse para estratos o regiones. Un ejemplo de dichas tablas es el que se presenta a continuación (**Tabla 4**):

Tabla 4. Tabla de coeficientes mórficos.

cd	CM	cd	CM	cd	CM
10	0.70	25	0.61	40	0.56
15	0.65	30	0.60	45	0.54
20	0.63	35	0.59	etc.	

3.6 Cubicación de Tocones, Puntas y Ramaje.

El tocón de un árbol es la sección inferior ubicada desde el suelo, hasta la altura de corte de derribo del árbol. En comercialización de madera en rollo esta porción carece de significación, sin embargo en algunos estudios específicos se requiere su medición.

El procedimiento de cubicación consiste en considerar al tocón como un cuerpo truncado. En coníferas, generalmente adopta la forma de un truncado de neiloide, mientras que en árboles de clima tropical suele ser muy irregular.

Cuando el tocón es poco convexo en su perfil se puede hacer la medición del diámetro de la sección superior (D_1) y de la sección a nivel del suelo (D_0), obtener su promedio y, calculada el área de la sección media multiplicarla por la altura para

estimar el volumen. Otra opción es la de medir el diámetro de la sección media (D_m), calcular el área y con ésta y la altura determinar el volumen. Para mayor precisión, y en casos donde el perfil es marcadamente convexo, se divide virtualmente el tocón en secciones de corta longitud, más corta la longitud cuanto más convexo sea el perfil y se obtiene el volumen de cada rodaja con alguna expresión (**Figura 87**).

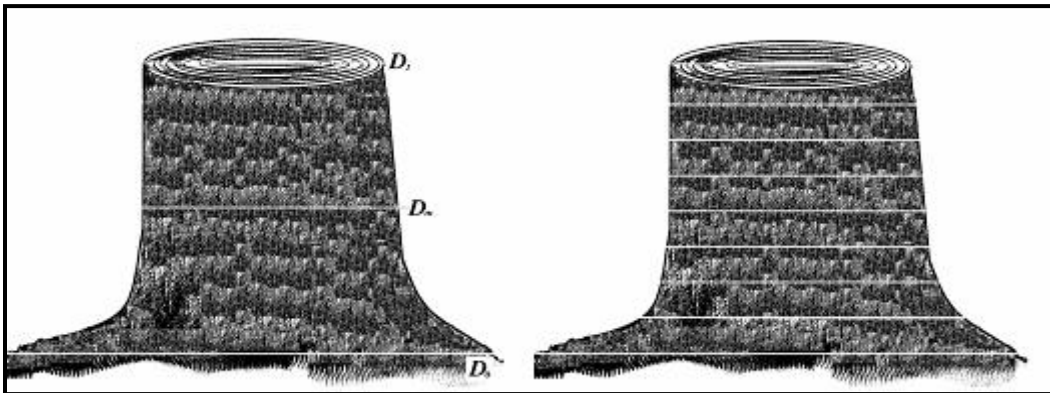


Figura 87. Determinación del volumen de tocones.

Las puntas de los árboles usualmente se asemejan a un paraboloides apolónico; la fórmula que debe utilizarse para su cubicación es:

$$V_P = \frac{S_P h_P}{2}$$

- V_P = Volumen de la punta.
 S_P = Área de la base de la punta.
 h_P = Altura de la punta.

En la comercialización de madera, generalmente, se desprecia el volumen representado por el ramaje, ya que de él son pocos los productos madereros que se pueden obtener. Sin embargo, para trabajos de investigación y otros si es importante hacer tal medición. En estos casos cada rama se considera como un pequeño fuste y se divide en pequeños trocillos que se cubican por cualquiera de los procedimientos descritos; suele usarse la fórmula de Huber.

En los casos en que se elabora leña de brazuelo para aglomerados o celulosa y es importante su cubicación y comercialización, su volumen se determina como se verá en cubicación de leñas.

3.7 Cubicación de Corteza.

La corteza, que en la mayoría de los casos constituye un desperdicio sin valor alguno, en ocasiones es un producto secundario importante y a veces el producto principal de la explotación como ocurre con el palo blanco (*Lysiloma cándida*) de las leguminosas, en Baja California Sur, o el mauto (*Lysiloma mauto*) en Sinaloa, de las que se obtienen sustancias curtientes (taninos). El grueso o espesor de la corteza varía, en igualdad de condiciones, con la edad del árbol; a mayor edad, mayor grosor de corteza. Dentro de un mismo sujeto, el espesor de la corteza presenta su máximo en la parte inferior del tronco y su mínimo en la parte superior. Esta disminución del espesor de la corteza no es uniforme sino que con frecuencia presenta irregularidades.

Dentro de una misma especie, y aun teniendo los árboles la misma edad, la cantidad absoluta y relativa de corteza es mayor en los sujetos que vegetan en estación más pobre. Esta influencia es tan grande que borra u oculta la influencia de la edad y así se observa que los árboles jóvenes que crecen en estaciones pobres tienen mayor cantidad absoluta y relativa de corteza que sujetos menos jóvenes desarrollados en estaciones buenas.

La cantidad relativa de corteza disminuye a medida que aumenta el diámetro y dentro de una misma clase diamétrica, dicha cantidad es mayor en los árboles de menor altura, lo que está de acuerdo con lo dicho anteriormente, ya que la altura es un indicador de la calidad de estación.

Cuando es importante conocer el volumen de la corteza se recurre a cualquiera de los siguientes métodos:

3.7.1 Por Diferencia de Volúmenes.

$$v_c = v_{cc} - v_{sc}$$

v_{cc} = Volumen con corteza.

v_{sc} = Volumen sin corteza.

v_c = Volumen de la corteza.

3.7.2 Ponderal.

Se basa en la determinación del peso específico de la corteza; con base en él y con el peso de la corteza a cubicar se determina el volumen.

$$v_c = \frac{p_c}{p_{ec}}$$

v_c = Volumen de la corteza.

p_c = Peso de la corteza.

p_{ec} = Peso específico de la corteza.

3.7.3 Fórmulas Empíricas.

Para la determinación rápida de los volúmenes de corteza se han generado en muchos lugares fórmulas empíricas con la utilización de métodos de regresión, las cuales, mediante la medición de algunas dimensiones fácilmente medibles de los fustes o de los árboles nos definen el volumen de la corteza en términos absolutos o relativos.

Una de las fórmulas obtenidas en el extranjero es la siguiente:

$$p_c = 200 \frac{2b}{d_{\frac{L}{2}}}$$

p_c = Por ciento de corteza respecto al volumen del árbol.

$d_{\frac{L}{2}}$ = Diámetro con corteza a la mitad de la longitud del fuste.

b = Grosor de la corteza en el mismo lugar de medición del diámetro.

3.8 Cubicación de Árboles en Pie.

Los procedimientos antes descritos no tienen dificultad en su aplicación cuando el árbol ha sido derribado y troceado, sin embargo suele ser necesario o conveniente no derribarlo para hacer la cubicación.

En el caso de árboles en pie se recurre a la medición de alturas parciales y de diámetros en los puntos que se seleccionan como divisiones entre troza y troza utilizando dendrómetros como el relascopio o el telerrelascopio de Bitterlich.

4 Cubicación de Leñas, Madera Aserrada y Otros Productos.

4.1 Cubicación de Leñas.

Los trozos de fuste, raíz y ramas, impropios para producir piezas madereras, que se destinan a la combustión, carbonización o fabricación de celulosa y tableros aglomerados reciben el nombre genérico de leñas, las cuales se clasifican por su forma (rollo o rajada), tamaño, y género o especie de que proceden.

En teoría las leñas pueden cubicarse por los procedimientos establecidos para la cubicación de trocería, pero en la práctica estos procedimientos resultan antieconómicos y por eso se han ideado otros métodos más expeditos y aún más exactos para cubicar tanto la leña en rollo como en raja.

Los métodos para cubicación de leñas pueden clasificarse en dos grupos, a saber:

 Métodos básicos.

 Métodos aplicados o comerciales.

4.1.1 Métodos Básicos.

Los métodos básicos nos permiten, en principio, la determinación del volumen de una cierta cantidad de leña aunque en general son utilizados para la obtención de elementos que nos permitan la cuantificación rápida de grandes volúmenes de este material, como son los denominados coeficientes de apilamiento.

Los coeficientes de apilamiento son factores por los que hay que multiplicar el volumen aparente de una pila de leña para obtener el volumen real y se obtienen mediante el cociente del volumen real entre el volumen aparente de una pila de leña de dimensiones conocidas.

En la definición del volumen real de leña existente en un pila, intervienen una serie de factores como son el diámetro o grosor de las leñas, el tipo de leña, la especie, su rectitud, la presencia o no de corteza, la forma de apilamiento, el método de trabajo de los elaboradores de leña, etc., de tal forma que, al variar estos factores de una zona a otra hacen imprescindible la determinación de coeficientes de apilamiento para cada condición.

4.1.1.1 Inmersión.

La cubicación por los métodos de inmersión se hace con el auxilio de instrumentos especiales llamados xilómetros. Con un tonel, barrica o algún otro recipiente se puede improvisar un xilómetro adaptando en la parte superior del mismo una llave o un tubo. Se introduce la leña que se pretende cubicar procurando que la misma quede completamente sumergida en el agua. Al realizar esta operación se derramará por la llave una cantidad de agua que recogida, medida o pesada nos dará el volumen de la leña introducida al recipiente.

Uno de los mejores modelos de xilómetro se compone de un cilindro de zinc reforzado por cuatro cinchos del mismo metal que tienen por objeto evitar que el recipiente se deforme al estar lleno de agua (**Figura 88**). En la parte lateral se coloca un tubo de latón acodado hacia arriba en el cual se enchufa un tubo de vidrio de nivel, sujeto en su parte superior por una armadura de metal. En su parte inferior lleva una llave para el vaciado del recipiente.

Lleno de agua este xilómetro, hasta que el líquido aparezca en el tubo de nivel y coincida con el cero de la gradación u otra división cualquiera, se introduce totalmente la leña por cubicar y el agua ascenderá tanto en el recipiente como en el tubo de nivel. La lectura de este último o la diferencia de lecturas (en el caso de que el nivel inicial del agua no hubiese coincidido con el cero), nos proporcionará el volumen de la leña.

Como la leña generalmente es más ligera que el agua, para sumergirla habrá que usar un peso o lastre cuyo volumen debe determinarse previamente para deducirlo del que resulte de la lectura.

La existencia del tubo de nivel y de la llave no es indispensable cuando se usan recipientes que se adaptan como xilómetros, ya que el volumen de la leña se determina conociendo las alturas del agua antes y después de la inmersión. Con el conocimiento o determinación del área de la sección transversal del recipiente se calculan los dos volúmenes y por la diferencia de ellos resultará el de la leña introducida.

Cualquiera que sea el tipo de xilómetro utilizado se recomienda cubicar la mayor cantidad posible de leña y utilizar material verde, en el primer caso para reducir la importancia relativa de los errores, y en el segundo para evitar absorciones significativas de agua que falsearían los resultados.

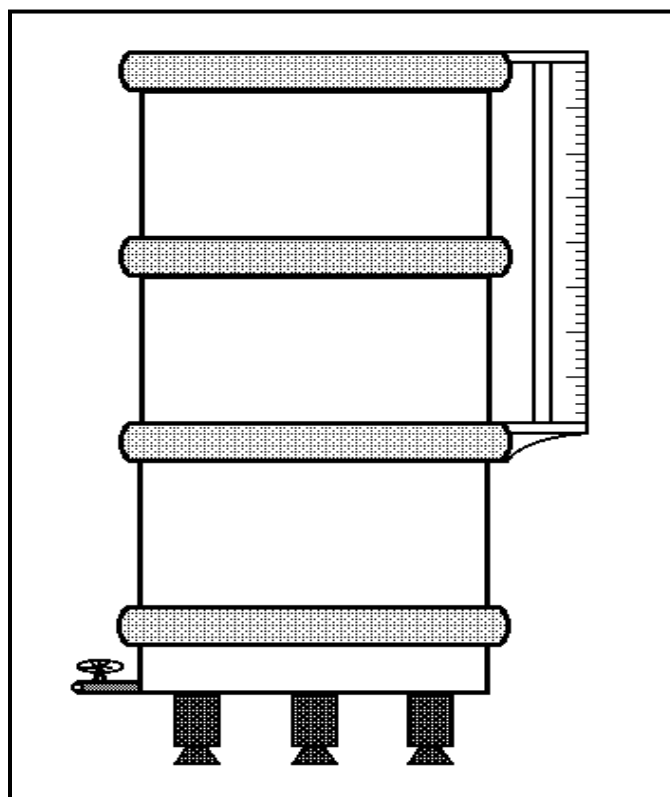


Figura 88. Xilómetro.

Cualquiera que sea el tipo de xilómetro utilizado se recomienda cubicar la mayor cantidad posible de leña y utilizar material verde, en el primer caso para reducir la importancia relativa de los errores, y en el segundo para evitar absorciones significativas de agua que falsearían los resultados.

4.1.1.2 Ponderal.

El volumen de la leña de una pila puede obtenerse por la fórmula:

$$V_L = \frac{P_L}{Pe_L}$$

V_L = Volumen de leña (dm³).

P_L = Peso de la leña en la pila (Kg).

Pe_L = Peso específico de la leña (Kg/dm³).

El peso de la leña (P_L) puede obtenerse con auxilio de balanzas o dinamómetros y el peso específico (Pe_L) se obtiene dividiendo el peso P_1 de un volumen V_1 de leña conocido entre el peso P_2 del mismo volumen de agua.

Investigaciones realizadas sobre el particular han permitido saber que la mayor parte de las maderas de diferentes especies tienen recientemente apeadas un peso específico muy próximo a la unidad, de manera que cuando no se requiere mucha exactitud en la cubicación de la leña su volumen se puede conocer determinando el peso de la misma en kilogramos, el cual vendrá expresado en dm^3 . Al secarse la madera, ese volumen podría reducirse dependiendo del tipo de madera y también cambiaría su peso específico.

4.1.1.3 Determinación de áreas.

Si se apilan las leñas de una misma longitud de tal modo que las secciones extremas de las mismas se presenten, unas en el frente de la pila y las otras en la parte de atrás, el volumen real de leña en la pila se puede estimar determinando el área de las secciones del frente, de atrás o mejor, de su promedio, y multiplicándola por la longitud de la leña.

Para determinar el área de las secciones extremas de las leñas en la pila o de una parte determinada de ésta se puede recurrir al calcado de las secciones de los leños en papel transparente o a la toma de una fotografía de ellas (**Figura 89A**), al calcado en plantillas de puntos (**Figura 89B**), o en plantillas cuadrículadas (**Figura 89C**), entre otros métodos.

Una vez que se han calcado las secciones en papel transparente o cuando se tiene una fotografía de un área determinada de la pila, se sobrepone a uno u otra una malla de puntos o de cuadros de densidad definida (número de puntos o cuadros por unidad de superficie) y se cuentan los puntos o cuadros que caen dentro de las secciones de los leños o los que quedan fuera. De manera similar procedemos cuando calcamos las secciones directamente en una malla de puntos o cuadros. Es importante hacer notar que en la medida en que la densidad de puntos o cuadros sea mayor, la precisión en la determinación de la superficie será también mayor.

Una vez que se tiene la superficie de las secciones transversales de los leños contenidos en la superficie de la pila considerada, el volumen de ellos será igual a la superficie obtenida multiplicada por la longitud de los leños.

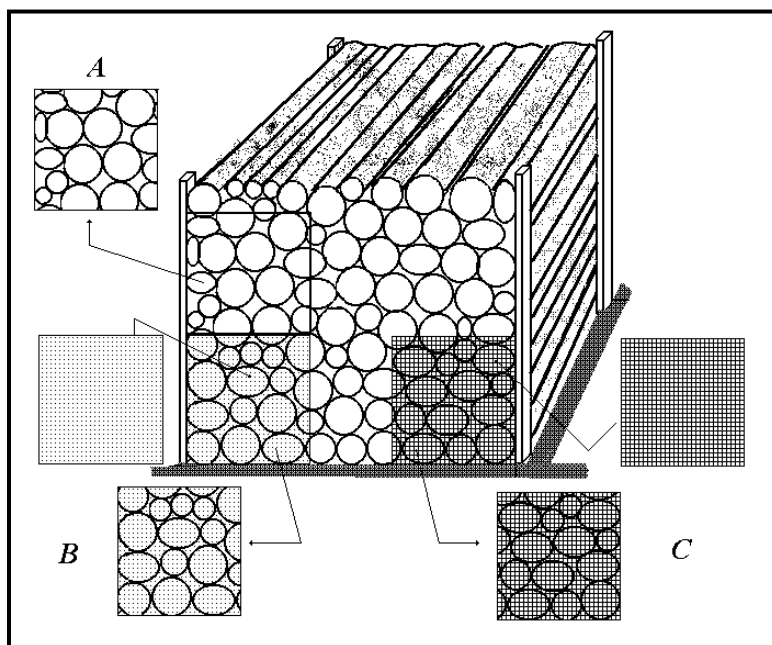


Figura 89. Determinación del área de secciones transversales de leñas en un apilamiento. A. Calcado en papel transparente o fotografía de secciones. B. Calcado en plantilla de puntos. C. Calcado en plantilla cuadriculada.

Con base en el número de puntos o cuadros dentro de las secciones o el número de puntos o cuadros fuera de ellas (en los huecos que dejan las secciones entre ellas), se puede calcular el coeficiente de apilamiento que se tiene en el área considerada, siendo en uno u otro caso el siguiente:

$$CA = \frac{NP_L}{NP_S}$$

$$CA = 1 - \frac{NP_H}{NP_S}$$

CA = Coeficiente de apilamiento de la pila.

NP_L = Número de puntos dentro de las secciones transversales de los leños.

NP_S = Número total de puntos en la superficie considerada de la pila.

NP_H = Número de puntos fuera de las secciones transversales de los leños.

Otro método para el cálculo de las áreas de los extremos de los leños contenidas en una superficie determinada del frente de la pila, que se han calcado

en papel transparente, es la utilización de un planímetro siguiendo los perímetros de los leños. La suma de las áreas multiplicada por la longitud de los leños será igual al volumen de leña en la parte de la pila que se consideró.

Asimismo, el cociente de la suma de las áreas de los leños sobre el área de la pila en que estaban ubicadas nos dará el coeficiente de apilamiento.

Para determinar la superficie del frente de la pila o de una parte de él, ocupada por las secciones transversales de las leñas, una vez calcados los perímetros en papel cuadrado o con puntos, se cuenta el número de cuadros o de puntos que quedaron dentro de las secciones; sabiendo el número de ellos que se tiene por metro cuadrado mediante una sencilla regla de tres o proporción se conoce la superficie que ocupan las secciones transversales de la leña y multiplicada ésta por la longitud, se obtiene el volumen.

4.1.2 Métodos Aplicados.

4.1.2.1 Coeficientes de apilamiento.

El volumen de las leñas se expresa en nuestro país generalmente en *cuerdas* o en metros cúbicos. Las *cuerdas*, son unidades establecidas por la costumbre y miden el espacio ocupado por pilas de leña de dimensiones determinadas, pero no indican la cantidad de leña contenida en ellas (**Figura 90**).

Las dimensiones de las cuerdas varían de una región a otra, siendo las más usuales:

Cuerda estándar o de 24" x 24". Las dimensiones de esta cuerda son 16' de largo * 4' de altura * 2' de ancho; se usa para medir leña en raja. Su nombre de cuerda de 24" x 24" se debe a que la raja tiene una longitud de 24" (2') y de que la base de la raja, que es un sector circular, tiene un perímetro que mide 24" (**Figura 91**).

Las otras cuerdas que en la actualidad se utilizan poco en la cubicación de leñas son:

Cuerda de 27" x 27". Sus dimensiones son: longitud = 16', altura = 4' y ancho = 27".

Cuerda de 20" x 20". Sus dimensiones son: longitud = 16', altura = 4' y ancho = 20".

Cuerda de 18" x 18". Sus dimensiones son: longitud = 16', altura = 4' y ancho = 18".

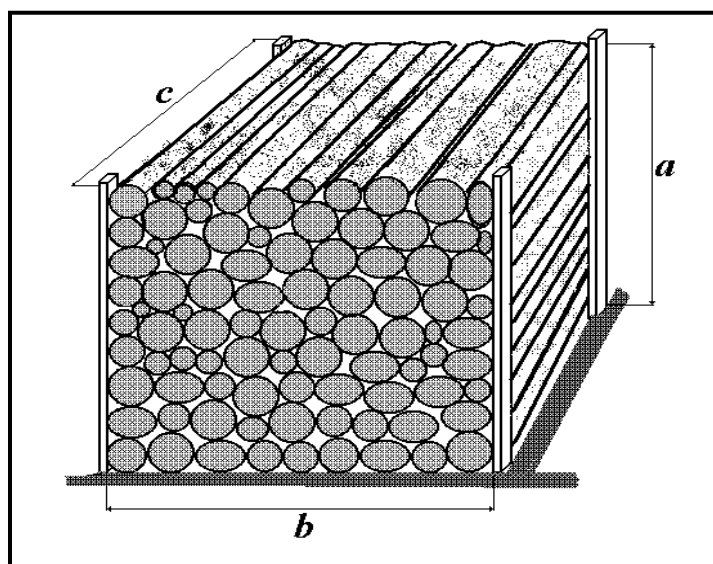


Figura 90. Base de cálculo del volumen real utilizando coeficientes de apilamiento.

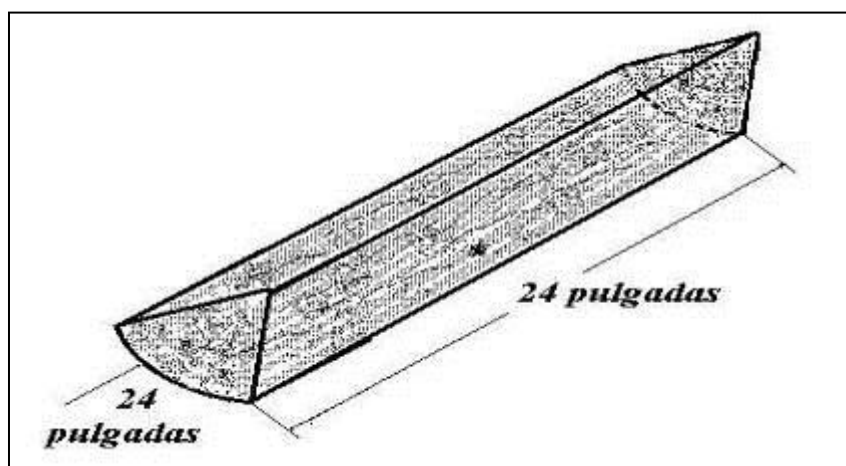







Figura 91. Raja de leña de 24 por 24.

La cuerda para la cubicación del brazuelo o ripio (que se elabora de la copa de los árboles, de la punta del tronco y de las ramas gruesas y que por lo tanto es leña delgada en rollo) tiene las mismas dimensiones que la estándar, es decir 16' * 4' * 2', variando sólo su volumen real de leña.

Para determinar el volumen real de leña contenido en una pila se determina primero el volumen aparente de la misma multiplicando sus 3 dimensiones y luego se multiplica por un factor que se conoce como ***coeficiente de apilamiento***.






Como por grande que sea el esmero al hacer el apilamiento siempre quedan huecos, dicho coeficiente es siempre un número menor que la unidad.

Los coeficientes de apilamiento para las distintas cuerdas son:

 Cuerda de 27'' * 27''	=	0.7
 Cuerda estándar o 24'' * 24''	=	0.7
 Cuerda de 20'' * 20''	=	0.6
 Cuerda de 18'' * 18''	=	0.6
 Cuerda de brazuelo	=	0.5 - 0.4

Cuando el brazuelo no presenta muchas irregularidades se usa el 0.5 y cuando es muy irregular se usa el 0.4.

El volumen real de leña obtenido en una pila, y en consecuencia el valor de su ***coeficiente de apilamiento***, es muy variable dependiendo de diversos factores como los siguientes:

-  En igualdad de otras condiciones el volumen real de leña contenido en una pila disminuye a medida que aumenta la longitud de la leña debido a que los huecos producidos por la curvatura de la leña son más grandes cuanto más pronunciada es ésta. La influencia de la curvatura es mayor en la leña en rollo que en la leña rajada.
-  A igualdad de otras condiciones el volumen real de leña depende de la forma de hacer el apilamiento y de la habilidad y pericia que se tenga para ello.
-  A igualdad de otras condiciones el volumen real aumenta a medida que crece el grueso de la leña, en virtud del menor número de huecos que deja entre sí la leña.
-  A igualdad de otras condiciones el volumen real de leña de una pila y el valor de su coeficiente de apilamiento serán mayores en la leña en raja que en la leña en rollo (brazuelo).
-  El volumen real de la leña de una pila y su coeficiente de apilamiento serán mayores cuando la leña proviene de maderas duras y menores en maderas suaves.

- 👤 A igualdad de otras condiciones el volumen real de leña de una pila y el valor de su coeficiente de apilamiento serán mayores en la leña sin corteza que en la leña con corteza.
- 👤 La leña apilada proveniente de puntas y ramas tiene menor coeficiente de apilamiento que la que proviene del fuste.

Cuando la pila se encuentra en terreno inclinado, si la longitud de la misma se mide sobre el terreno, la altura debería medirse de manera perpendicular a la inclinación del mismo (**Figura 92**).

Si la longitud se mide en posición horizontal y la altura en posición vertical se obtiene el mismo resultado, es decir:

$$L * h = L_1 * h_1$$

Aunque históricamente las dimensiones de las cuerdas han sido las que anteriormente se han definido, en la actualidad el tamaño de las leñas ha sufrido modificaciones y es común tener leña en raja o en rollo de cuatro o hasta de ocho pies de longitud lo que modifica proporcionalmente las dimensiones de las cuerdas, manteniéndose los volúmenes.

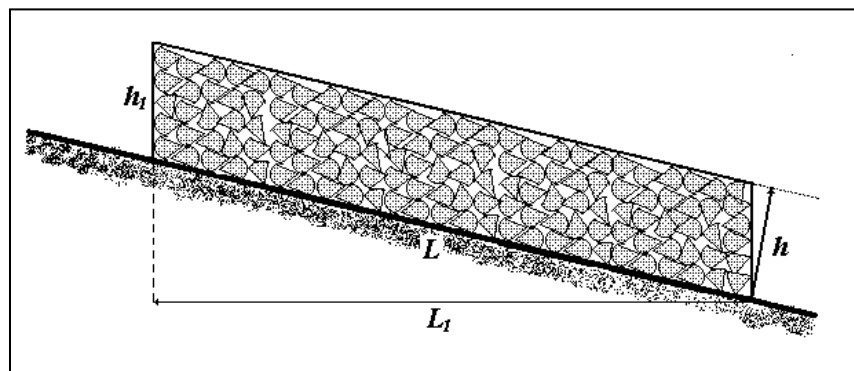


Figura 92. Medición de la longitud y altura de una pila de leña en terreno inclinado.

4.1.2.2 Tablas especiales.

En algunos países se han construido tablas que indican el volumen de leña que se puede obtener de árboles de diferentes dimensiones. El volumen de leña se expresa en porcentaje o en forma decimal con respecto al volumen del fuste.

4.2 Estimación del Volumen de Madera Aserrada de Trocería.

4.2.1 El Pie Tabla.

El pie tabla (*pt*) es una unidad de medida del sistema inglés comúnmente usada en los aserraderos y en las operaciones comerciales de madera. Teóricamente es un paralelepípedo de un pie de largo por un pie de ancho y una pulgada de grueso (**Figura 93**). Su volumen es igual a 44 pulgadas cúbicas igual a 0.0023597 m^3 o sea 2 decímetros cúbicos 359 centímetros cúbicos = 0.00236 m^3 . Un metro cúbico equivale a 423.776 *pt*.

Las tablas y tablones que se obtienen en los aserraderos, los durmientes de ferrocarril, las vigas, los cuadrados para minas y en general las piezas labradas con sierra o hacha se miden en pies tabla. En el **Anexo 1** se consigna una tabla de cubicación de madera aserrada en pies tabla sin considerar refuerzo.

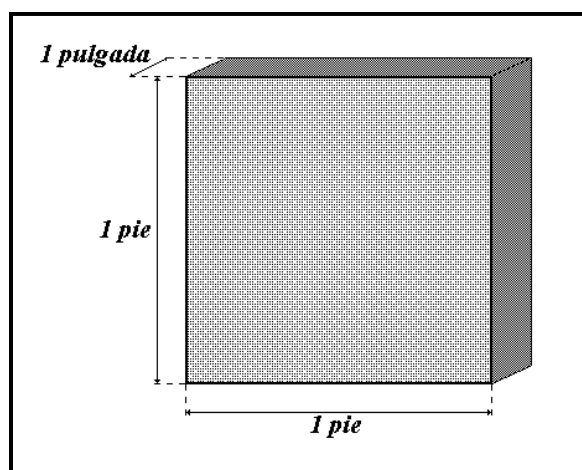


Figura 93. Pie tabla.

Las dimensiones de las piezas aserradas, fundamentalmente tablas y tablones, se consignan anotando primero el grueso, después el ancho y finalmente el largo; ejemplo: 1''*8''*18'; 1/2''*10''*20'; 1 1/2''*12''*12'. Conocido el grueso y el ancho en pulgadas y la longitud en pies de una pieza, para determinar su volumen expresado en pies tabla basta con multiplicar las 3 dimensiones y el resultado se divide entre 12, ejemplo:

$$\text{👤} \downarrow 1'' * 8'' * 18' = 144 \div 12 = 12 \text{ pt}$$

$$\text{👤} \downarrow 1/2'' * 10'' * 20' = 100 \div 12 = 8.3 \text{ pt} = 8 \text{ pt (ya que en las operaciones comerciales solo cuentan los pies tabla completos).}$$

Al cubicar maderas aserradas hay que determinar si las piezas tienen o no refuerzo. El refuerzo es un excedente que se da especialmente en el grueso de las piezas de madera aserrada, principalmente en tablas y tablones, el cual tiene como objeto que al ser cepilladas quede el espesor comercial justo. El refuerzo que generalmente se da a las tablas y tablones es de $\frac{1}{4}$ de pulgada, el cual no se contabiliza en las operaciones de compra-venta.

La madera aserrada sin cepillar se conoce como madera aserrada áspera y la otra como madera aserrada cepillada. Para fines de control forestal se debe conocer el volumen incluyendo el refuerzo.

4.2.2 Reglas Madereras de Estimación.

En la mayoría de los aprovechamientos forestales de madera los árboles y trozas se compran o se venden según la cantidad de madera aserrada que pueden producir una vez cortados y aserrados, tomando como unidad el millar de pies tabla (mpt).




En la práctica, a los árboles en pie sólo es posible medirles el diámetro normal y la altura total o comercial, ya que la disminución gradual del espesor del tronco, el grueso de la corteza, las curvaturas y otros defectos son difíciles de determinar, por lo que el cálculo del volumen en la forma indicada tiene la categoría de una estimación que adolece de errores por exceso o por defecto que varían comúnmente de un 10 a 20 % de la producción real.

Tratándose de trozas se tiene la ventaja de que pueden tomarse algunas medidas adicionales, tales como diámetros, longitudes o disminución gradual del espesor de la troza, curvaturas y otros defectos, por lo cual la cubicación puede hacerse hasta con una aproximación de 5%, manteniendo esta operación su carácter de estimación, ya que no se puede determinar de antemano lo que la sierra descubrirá (pudriciones, etc.) al ser aserradas las trozas, lo que puede influir en el volumen de madera aserrada que se producirá.

Los volúmenes de madera aserrada que se pueden obtener de las trozas se determinan con el auxilio de una tabla que contiene estos volúmenes para trozas de diferentes diámetros y longitudes, conocida como tabla maderera de estimación, cuyos datos se pueden grabar en reglas de madera para diferentes longitudes de trozas en pies y diámetros en pulgadas. Para entrar a las tablas o utilizar la regla se considera el diámetro sin corteza de la sección transversal menor de la troza en

pulgadas completas y las longitudes en pies también completos. El volumen estará expresado en pies tabla.

Las reglas madereras de estimación se han construido fundamentalmente por tres métodos.

-  Por diagramas trazados a escala.
-  Por fórmulas matemáticas.
-  Por métodos empíricos.

Los volúmenes determinados para las reglas construidas por los dos primeros métodos pueden modificarse por un factor de corrección calculado por el tercer método. De hecho, todas las reglas construidas por medio de fórmulas matemáticas tienen un factor de corrección para lograr resultados más aproximados. Estos factores se calculan siguiendo un lote de trozas, desde que entra al aserradero hasta que salen las tablas obtenidas de dicho lote.

4.2.2.1 Método de diagramas.

Las primeras reglas madereras que se conocieron fueron construidas mediante diagramas que son círculos trazados a escala y que representan la sección menor de las trozas desprovistas de corteza en los cuales se trazan los grosores y anchos de las tablas que se pueden obtener de ella considerando el grosor del corte de la sierra y los desperdicios que por costeras y orillas se tendrán.

Así por ejemplo, si se tiene una troza de 10 pulgadas de diámetro, 4 pies de longitud y se van a obtener tablas con un ancho mínimo de 4 pulgadas y 1 pulgada de grueso en un aserradero con sierra circular con grosor de corte de un cuarto de pulgada, se procedería de la siguiente manera:

Comenzando por el lado izquierdo se traza una cara (C_1) dejando una costera, o capote, suficientemente gruesa para que la cara tenga la anchura de la tabla comercial más pequeña (en el ejemplo = 4"). Paralela a la primera línea se traza otra línea a una pulgada de distancia que representa la cara opuesta de la primera tabla (C_2). Enseguida se deja un espacio que corresponde al desperdicio por concepto de aserrín, el cual estará en consonancia con el espesor del corte de la sierra que se va a utilizar (en el ejemplo sierra circular de 1/4") y se marca la cara opuesta de la segunda tabla también a una pulgada de la primera cara de la misma.

En igual forma se dibujan todas las caras que es posible obtener de la troza. Una vez hecho esto se procede a recortarlas por medio de líneas horizontales,

dando a cada tabla la anchura comercial mayor que sea posible (**Figura 94**). Esta operación forma el diagrama, procediéndose a la determinación del volumen de cada tabla, tomando en cuenta el ancho, el grueso y la longitud de la troza considerada. La suma de los volúmenes de las tablas resultantes nos da el volumen de madera aserrada que es posible obtener de la troza en cuestión.

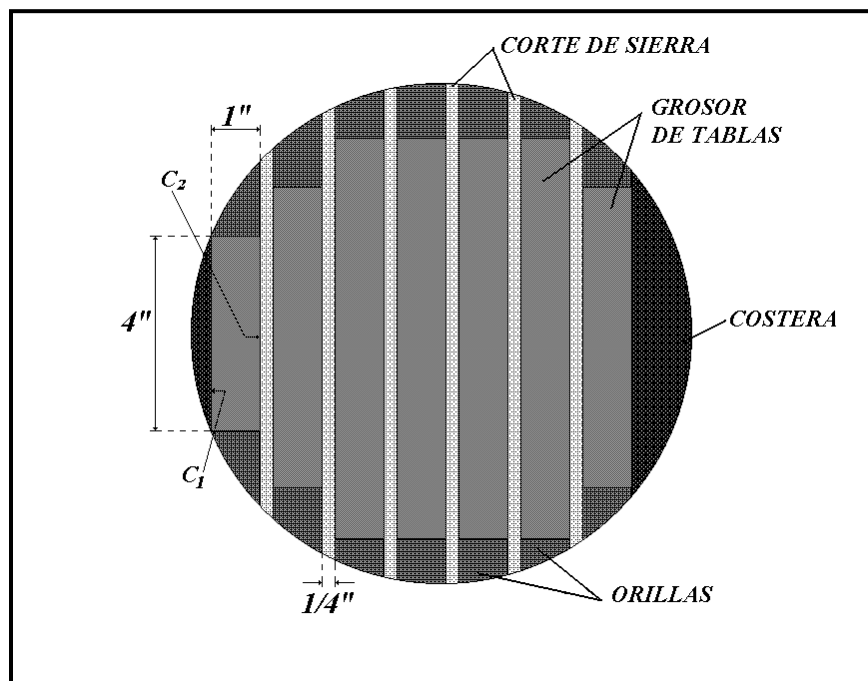



Figura 94. Construcción de reglas de estimación maderera por el método de diagramas.

En el ejemplo de diagramación se obtuvieron las tablas y sus volúmenes en pies tabla siguientes:

$$\begin{aligned}
 &1 \text{ tabla de } 1'' \times 4'' \times 4' = 16/12 = 1.3333 \text{ pt} \\
 &2 \text{ tablas de } 1'' \times 6'' \times 4' = 24/12 = 4.000 \text{ pt} \\
 &4 \text{ tablas de } 1'' \times 8'' \times 4' = 32/12 = 10.6664 \text{ pt}
 \end{aligned}$$

En la troza del ejemplo de 10 pulgadas de diámetro y 4 pies de longitud se tuvieron los siguientes resultados en unidades del sistema métrico decimal:

- ♣ Superficie de la sección transversal menor sin corteza = 0.04908 m^2 .
- ♣ Volumen total de la troza cilíndrica = 0.05983 m^3 .
- ♣ Pies tabla obtenidos = 16 pt.
- ♣ Volumen en metros cúbicos de los pies tabla obtenidos = 0.0377552 m^3 .
- ♣ Magnitud de las pérdidas = 0.0220748 m^3 .

 Porcentaje de pérdidas del volumen total = 36.9%.

Si la operación indicada se repite con trozas de diferentes diámetros que tengan interés se obtendrá una serie de datos que puede utilizar para construir una regla maderera de estimación. Cuando los volúmenes de trozas se disponen en orden progresivo de diámetros se observa que las diferencias entre los volúmenes de las trozas contiguas son irregulares. Esta irregularidad puede subsanarse construyendo una gráfica con los diámetros y volúmenes de las trozas en la que por medio de una curva se compensen las irregularidades.

4.2.2.1.1 Regla Scribner.

La regla Scribner, que es una de las más antiguas y de las que más se usan en Estados Unidos fue publicada en 1846 por J. M. Scribner construida mediante diagramas, pero se omitió la gráfica lineal de compensación de las diferencias de volumen. Dada la época en que dicha regla fue construida, explica en cierta medida el que sea poco exacta. La regla da volúmenes erróneos por defecto, tratándose especialmente de trozas de pequeño diámetro.

De la época en que la regla Scribner fue ideada a la fecha, la eficiencia del personal y de la maquinaria han mejorado notablemente sucediendo lo mismo con el grado de utilización permitida por las condiciones del mercado. La regla Scribner no toma en cuenta el aumento gradual en el diámetro de las trozas y por consiguiente tampoco considera el aserrío de las costeras que se obtienen al escuadrar la troza y que produce tablas de pequeña longitud, práctica que no se realizaba en la época en que se construyó la regla. El error de la regla está constituido por una diferencia entre el volumen estimado con la regla como obtenible de un lote de trozas y la cantidad de madera aserrada realmente elaborada de tal manera que: **Vol. estimado por la regla < Vol. real obtenido.**

La diferencia es por defecto, la cual puede aumentar en las trozas de pequeño diámetro hasta un 30%, que se reduce al incrementar el diámetro de las trozas hasta un 5% en las de diámetros muy grandes.

Algunas tablas y reglas de Scribner contienen valores basados en la siguiente ecuación desarrollada por Bruce y Schumacher (1965), para trozas de 16 pies de longitud:

$$v_{pt} = 0.79D_{sc}^2 - 2D_{sc} - 4$$

La regla Scribner Decimal C, que también está basada en diagramas, tiene una variación menor que la regla Scribner y sus volúmenes se aproximan a la decena más próxima suprimiendo en el grabado de la regla el dígito final, con lo que se ahorra una parte del grabado sin que los resultados sean afectados en forma apreciable. Esta regla es usada por el Servicio Forestal de Estados Unidos (**Anexo 2**).

Existen otras reglas basadas en diagramas, pero las descritas, junto con la regla Spaulding, desarrollada por N. W. Spaulding en 1868, que se usa mucho en la costa del Pacífico de Estados Unidos, son las más empleadas.

4.2.2.2 Método de fórmulas matemáticas.

Las reglas de estimación maderera también se han construido partiendo de una fórmula matemática que permite estimar la cantidad de madera aserrada que puede obtenerse de las trozas en función de su diámetro y de su longitud.

Las reglas empleadas en la medición de trozas consideran a éstas como si fueran cilíndricas. El volumen de una troza de cualquier longitud expresado en pies tabla se puede obtener multiplicando el volumen de un cilindro de un pie de longitud, expresado en pies tabla, por la longitud de la troza. El área de la sección menor de la troza se expresa así:

$$S_I = \frac{\pi D_{sc}^2}{4} = 0.7854 D_{sc}^2$$

D_{sc} = Diámetro de la sección menor de la troza sin corteza (pulgadas).

S_I = Superficie de la sección menor de la troza sin corteza (pulgadas cuadradas).

Si no hubiera pérdidas al aserrar las trozas, el volumen de una troza de un pie de longitud expresado en pies tabla considerando 12 pies tabla por pie cúbico se obtendría por la fórmula:

$$v_{pt} = \frac{0.7854 D_{sc}^2}{12} pt$$

Las pérdidas que se presentan al aserrar las trozas las podemos agrupar en dos tipos o partes. La primera incluye el aserrín y la contracción que experimenta

la madera al perder agua y la segunda abarca las pérdidas por costeras, orillas y recortes.

Las pérdidas por aserrín y contracción se pueden expresar en por ciento del volumen del cilindro y las pérdidas por costeras, recortes y orillas están relacionadas con la circunferencia o el diámetro de la sección de la troza.

Las pérdidas por aserrín y contracción dependen del grueso de la sierra y del grueso que se dé a las tablas. El porcentaje correspondiente a estas pérdidas se puede calcular por la fórmula:

$$P_{\%} = \frac{a + c}{g + a + c} 100$$

a = Grosor del corte de la sierra.

c = Pérdida por contracción de la madera.

g = grueso de las tablas que se elaboran.

$P_{\%}$ = Porcentaje de pérdidas del volumen total.

Si las trozas se asierran con sierra circular de 1/4" de espesor y las tablas a elaborar tienen 1" de grueso, las pérdidas únicamente por concepto de aserrín serían:

$$P_{\%} = \frac{\frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} 100 = 20 \%$$

Si se incluye la pérdida por contracción, la cual ha sido determinada por la experiencia en 1/16" en cada tabla de 1" de grueso o espesor, se tendrá:

$$P_{\%} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}}{1'' + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}} 100 = 23.5\%$$

La fórmula que nos da el volumen en pies tabla de una troza de un pie de longitud se puede expresar así:

$$v_{pt} = \frac{0.7854 D_{sc}^2}{12} \rightarrow v_{pt} = 0.06545 D_{sc}^2. \text{ Sin descontar pérdidas.}$$

Si de dicho volumen descontamos pérdidas por aserrín y contracción, el volumen queda reducido a:

$$v_{pt} = (1 - P_d) * 0.06545 * D_{sc}^2; P \text{ expresado decimalmente.}$$

Las pérdidas por costeras y orillas* están relacionadas con el diámetro de la sección de la troza; dichas pérdidas pueden considerarse como equivalentes a un anillo del mismo grosor para todas las trozas, excepción hecha de las muy pequeñas, de las que no es posible producir tablas de la anchura mínima comercial (**Figura 95**). Este anillo tiene un grosor (b) que varía entre 0.75" y 1", conocimiento obtenido con base en experiencias realizadas, de tal manera que las pérdidas por costeras y orillas reducen el diámetro de la sección en una cantidad que varía de 1.5" a 2" o sea el doble del grosor del anillo circular.

Si deducimos las pérdidas por costeras y orillas, el volumen de la troza nos queda:

$$v_{pt} = (1 - p_d) * 0.06545 * (D_{sc} - 2b)^2$$

Que es la fórmula general para la estimación del volumen de madera aserrada obtenible de trozas de 1 pie de longitud.

* Las tablas al salir del aserradero generalmente no tienen la anchura comercial deseada ya mencionada, la cual se expresa en pulgadas y aumenta de 2" en 2"; si tiene 7" hay que quitarle una pulgada para que la tabla quede de 6", el desperdicio es lo que se conoce como orilla, esta operación se efectúa en una sierra llamada desorilladora. Asimismo, al salir del aserradero, las tablas no tienen la longitud comercial deseada que se expresa en pies y aumenta de 2' en 2'. Si tiene 11' hay que cortarle un pie para que quede de 10'. Esta operación se hace por medio de una sierra llamada cabeceadora o sierra de péndulo y el desperdicio es lo que se conoce como recorte.

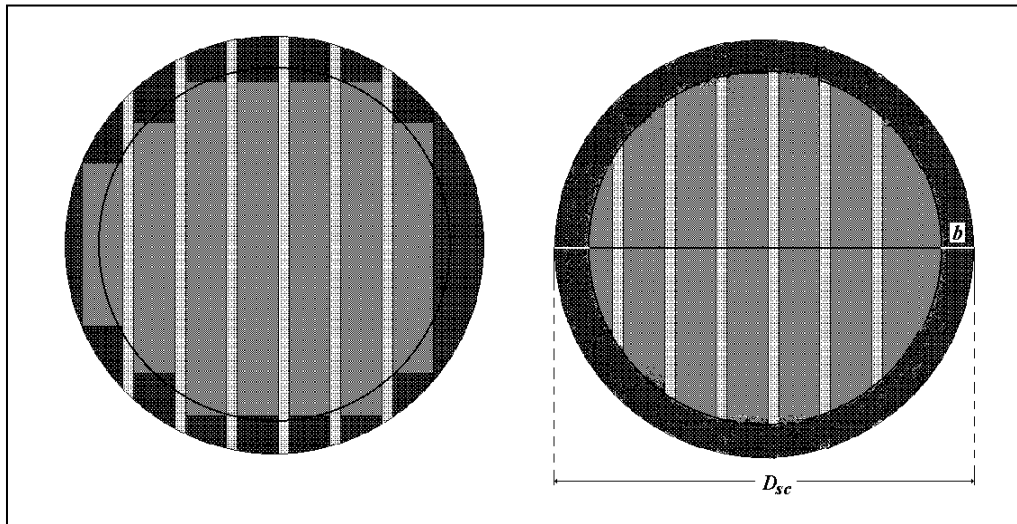


Figura 95. Anillo circular con grosor b , que representa las pérdidas por costeras y orillas al aserrarse una troza.

Este volumen corresponde a una troza de un pie de longitud. Si la troza tiene una longitud diferente multiplicamos este volumen por L en pies, o sea la longitud de la troza considerada:

$$v_{pt} = (1 - p_d) * 0.06545 * (D_{sc} - 2b)^2 * L$$

4.2.2.2.1 Regla Internacional.

Una de las mejores reglas construidas mediante fórmulas matemáticas es la regla internacional, desarrollada por Judson F. Clark en 1900 y publicada en 1906, está basada en un cuidadoso análisis de las pérdidas que ocurren durante el asierre de trozas. La fórmula básica de la regla internacional desarrollada para trozas de 4 pies de longitud (**Figura 96**), es:

$$v_{pt,I,4'} = 0.22 D_{sc}^2 - 0.71 D_{sc}$$

$v_{pt,I,4'}$ = Volumen en pies tabla estimado con la regla Internacional para trozas de 4 pies.

D_{sc} = Diámetro de la sección menor de la troza sin corteza expresado en pulgadas.

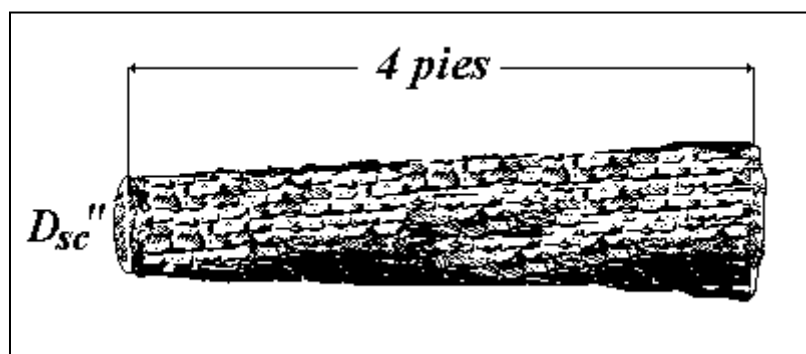


Figura 96. Troza de cuatro pies de longitud y diámetro de la sección menor sin corteza en pulgadas (D_{sc}), base de la regla Internacional.

La fórmula de la regla Internacional se puede obtener o deducir de la fórmula general de estimación maderera:

$$v_{pt} = (1 - p_d) * 0.06545 * (D_{sc} - 2b)^2 * L$$

Si suponemos que las trozas van a ser aserradas con sierra banda de 1/8" de espesor, que por cada tabla de 1" de grueso se pierde 1/16" por contracción y que la longitud de la troza es igual a 4 pies, las pérdidas por estos conceptos serán:

$$P_d = \frac{1/8 + 1/16}{1 + 1/8 + 1/16} = 0.158$$

$$v_{pt,I,4'} = (1 - 0.158) * 0.06545 * (D_{sc} - 2b)^2 * 4$$

$$v_{pt,I,4'} = (0.842) * 0.06545 * 4 * (D_{sc} - 2b)^2$$

$$v_{pt,I,4'} = 0.22 * (D_{sc} - 2b)^2$$

$$v_{pt,I,4'} = 0.22 * (D_{sc}^2 - 4D_{sc}b + 4b^2)$$

$$v_{pt,I,4'} = 0.22D_{sc}^2 - 0.88D_{sc}b + 0.88b^2$$

Los términos $(- 0.88 D_{sc} b + 0.88 b^2)$ representan las pérdidas por costeras y orillas; estas pérdidas, basándose en razones teóricas y en observaciones en los aserraderos, se llegó a la conclusión de que están representadas por el producto de

una constante K por el diámetro: KD_{sc} . La constante K se determinó en 0.71 quedando la fórmula de la regla Internacional para 4 pies de longitud, como sigue:

$$v_{pt,I,4'} = 0.22 D_{sc}^2 - 0.71 D_{sc}$$

Fórmula de la regla internacional para sierra cinta de 1/8", contracción de 1/16", tablas a aserrar de 1" de grueso y longitud de troza de 4'.

Para los casos en que las trozas tengan una longitud mayor a 4 pies, usualmente en múltiplos de 4 pies, para obtener las expresiones que nos den la estimación de madera aserrada que se obtendrá de ellas, se aplica la expresión anterior a cada segmento de cuatro pies, considerando el incremento que tendrá el diámetro.

Consideremos una troza de 16' dividida en 4 trozas de 4' cada una (**Figura 97**). Los diámetros se miden en la sección menor de las trozas. El aumento gradual se determinó midiendo un gran número de trozas, habiendo determinado un valor medio para dicho aumento de 0.5" por cada 4 pies de longitud, de manera que una troza de 16' de longitud se puede cubicar como si estuviera dividida en 4 trozas de 4 pies de longitud cada una, teniendo la primera troza un diámetro D_{sc} en pulgadas en su sección menor, la segunda troza un diámetro $D_{sc} + 0.5$ pulgadas, la tercera un diámetro $D_{sc} + 1$ pulgadas y la última un diámetro $D_{sc} + 1.5$ pulgadas.

Conocidos los diámetros y la longitud de las trozas se puede determinar por separado el volumen de cada troza empleando la fórmula $v_{pt,I,4'} = 0.22 D_{sc}^2 - 0.71 D_{sc}$ para cada troza de 4 pies de longitud, o aplicando la fórmula para trozas de 16' que a continuación se desarrolla:

Los volúmenes de las cuatro trozas en que se ha dividido la troza de 16 pies, se obtienen aplicando a cada troza la fórmula de la regla Internacional para trozas de 4 pies:

1a. Troza: $v_{pt,I,4'} = 0.22 D_{sc}^2 - 0.71 D_{sc}$

2a. Troza: $v_{pt,I,4'} = 0.22 (D_{sc} + 0.5)^2 - 0.71 (D_{sc} + 0.5)$

3a. Troza: $v_{pt,I,4'} = 0.22 (D_{sc} + 1.0)^2 - 0.71 (D_{sc} + 1.0)$

4a. Troza: $v_{pt,I,4'} = 0.22 (D_{sc} + 1.5)^2 - 0.71 (D_{sc} + 1.5)$

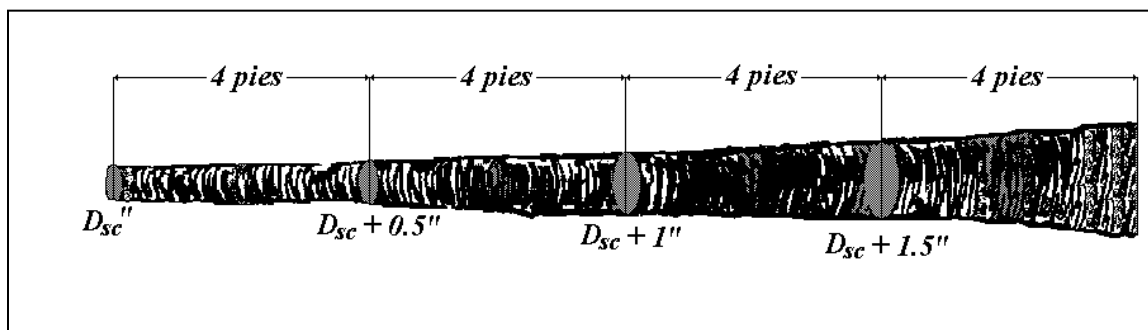


Figura 97. Troza de 16 pies de longitud y diámetro de la sección menor sin corteza en pulgadas (D_{sc}), para la aplicación de la fórmula de la regla Internacional para trozas de 4 pies.

Desarrollando estas fórmulas y sumando sus resultados se obtiene la fórmula que permite determinar el volumen de madera que es posible obtener de trozas de 16 pies de longitud y que es igual a:

$$v_{pt,I,16'} = 0.88 D_{sc}^2 - 1.52 D_{sc} - 1.36$$

Que es la fórmula de la regla Internacional para trozas de 16 pies de longitud y 1/8 de corte de sierra.

Asimismo, para trozas de otras longitudes en múltiplos de 4 pies se procede de la misma manera, aplicando a cada troza de cuatro pies que las constituyan la fórmula para trozas de esta longitud o aplicando las expresiones que algebraicamente se han obtenido al hacer la suma de los volúmenes parciales.

Las fórmulas de la regla Internacional para trozas de diferentes longitudes son:

Trozas de 4 pies:	$v_{pt,I,4'} = 0.22 D_{sc}^2 - 0.71 D_{sc}$
Trozas de 8 pies:	$v_{pt,I,8'} = 0.44 D_{sc}^2 - 1.2 D_{sc} - 0.3$
Trozas de 12 pies:	$v_{pt,I,12'} = 0.66 D_{sc}^2 - 1.47 D_{sc} - 0.79$
Trozas de 16 pies:	$v_{pt,I,16'} = 0.88 D_{sc}^2 - 1.52 D_{sc} - 1.36$
Trozas de 20 pies:	$v_{pt,I,20'} = 1.10 D_{sc}^2 - 1.35 D_{sc} - 1.90$

Si se analiza la fórmula de la regla Internacional se observará que es fundamentalmente correcta aunque los aserraderos de sierra circular que tienen pérdidas por aserrín de 1/4" o más no están capacitados para producir la cantidad de madera aserrada indicada por la regla.

Una de las ventajas de la regla Internacional consiste en que sus volúmenes pueden modificarse para adaptarlos a cualquier pérdida por concepto de aserrín. Por ejemplo, en el caso de que las trozas sean aserradas en una planta con sierra circular de 1/4" de corte, basta reducir los volúmenes leídos de la regla Internacional en un 9.5% para obtener los contenidos correctos.

Esto se debe a que para obtener una tabla de 1" de grueso en un aserradero con sierra circular se necesita disponer de una pieza de:

$$1'' + \frac{1''}{4} + \frac{1''}{16} = \frac{21''}{16}$$

Este es el espesor que debe tener la pieza para producir una tabla de una pulgada de grueso (**Figura 98**); en consecuencia, del espesor total de la pieza de 21/16" sólo se aprovecha una fracción o parte de ella que constituye la tabla de una pulgada; esta parte es igual a:

$x * \frac{21''}{16} = 1'' \quad \therefore \quad x = \frac{16}{21}$. Esta fracción es la parte del grueso total que se aprovecha.

En el caso de un aserradero con sierra cinta, para obtener una tabla de 1" se requiere una pieza con el siguiente espesor:

$$1'' + \frac{1''}{8} + \frac{1''}{16} = \frac{19''}{16}$$

Este es el espesor que debe tener la pieza en un aserradero con sierra banda para producir una tabla de una pulgada de grueso (**Figura 98**); en consecuencia, del espesor total de la pieza de 19/16" sólo se aprovecha una fracción o parte de ella que constituye la tabla de una pulgada; esta parte es igual a:

$$x * \frac{19''}{16} = 1'' \quad \therefore \quad x = \frac{16}{19}$$

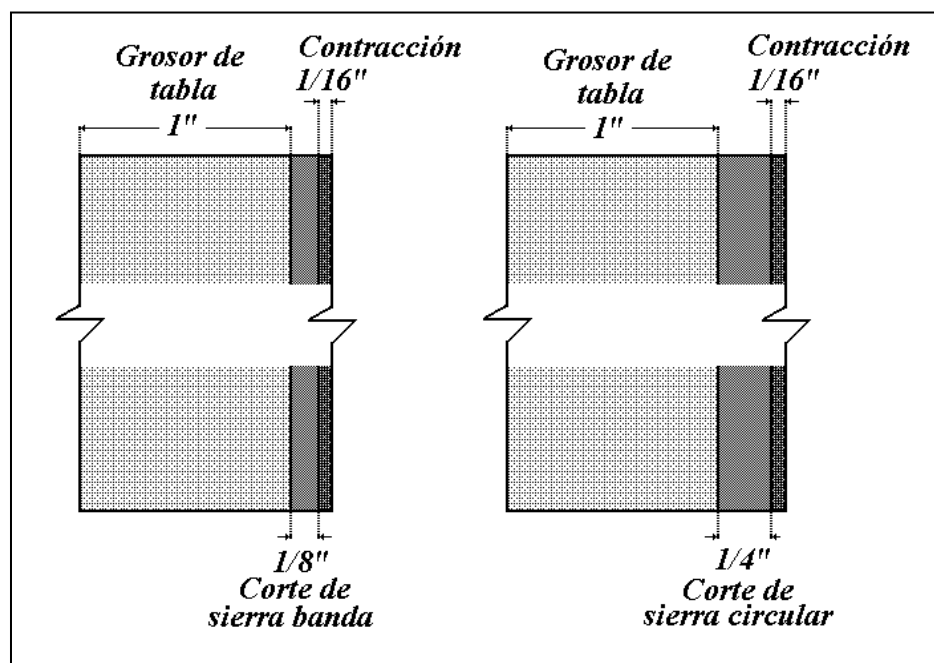


Figura 98. Grosor de piezas necesario para obtener una tabla de 1" de grueso en aserradero con sierra banda y con sierra circular.

Si hacemos que la parte que se aprovecha en un aserradero con sierra banda sea igual al 100%, podremos obtener qué porcentaje de éste se aprovecha en un aserradero con sierra circular.

$$\frac{16}{19} = \frac{16}{X} \quad \therefore \quad X = \frac{16}{\frac{16}{19}} * 100$$

$$X = \frac{16 * 19}{16 * 21} * 100 = \frac{19}{21} * 100$$

$$X = 90.47\% \approx 90.5\%$$

Esto nos indica que, en igualdad de otras condiciones, en un aserradero circular se tiene una pérdida del 9.5% más por concepto de asierre o aserrín que en un aserradero con sierra banda, por lo que, para transformar los valores que provee la regla Internacional para corte de sierra de 1/8" a valores para corte de sierra de 1/4", basta multiplicarlos por 0.905 o deducirles un 9.5% de pérdidas adicionales.

En los casos en que se emplee la regla Internacional no habrá exceso en la producción de madera aserrada. Sin embargo las pruebas realizadas en los aserraderos han demostrado que su exactitud sólo es relativa. Las trozas de pequeño diámetro tienden a producir más madera aserrada que la indicada por la regla, debido principalmente a que dichas trozas se obtienen generalmente de las puntas de los fustes que tienen un aumento gradual en su diámetro mayor que el considerado por la regla.

Por otra parte, este instrumento se construye bajo la suposición de que sólo se elaborarán tablas de 1” de grueso, de manera que sólo en aquellas plantas donde se haya seguido esta práctica se obtendrán resultados correctos, hecho poco común.

La regla tampoco toma en cuenta el desperdicio intencional que muchas veces se produce de material sano, como resultado de los esfuerzos realizados para obtener mejores calidades de madera. Esta práctica es más común en las trozas de grandes dimensiones, de suerte que no es raro encontrar un exceso en la producción tratándose de trozas de diámetros pequeños y un defecto pequeño en trozas de grandes dimensiones. En plantas poco eficientes se tendrá un déficit en la producción de madera aserrada en trozas de todas las dimensiones.

A pesar de sus inconvenientes, la regla Internacional es una de las mejores entre esta clase de instrumentos, ya que de hecho es la que proporciona mejores resultados, siendo de gran utilidad en trabajos de precisión (**Anexo 3**).

4.2.2.2 Regla Doyle.

En 1825 Edward Doyle publicó una regla maderera que adoptó su nombre. Esta regla, después de la Scribner, es la que más se usa en EU y es la más usada en México. La regla Doyle, basada en una fórmula matemática, es un buen ejemplo de que no por ese hecho significa que es exacta, ya que parte de supuestos falsos y como consecuencia de ello los volúmenes que proporciona son muy inexactos (**Anexo 4**).

El principio de la regla Doyle postula que: “El volumen de madera aserrada que es posible obtener de una troza, es igual al cuadrado de un cuarto del diámetro sin corteza de la sección menor de la troza, previamente disminuido en 4 pulgadas y multiplicado por la longitud de la troza”.

$$v_{pt, Doyle} = \left(\frac{D_{sc} - 4}{4} \right)^2 * L$$

$V_{pt, Doyle}$ = Volumen en pies tabla por Doyle.

D_{sc} = Diámetro de la sección menor sin corteza, en pulgadas.

L = Longitud de la troza en pies.

Los supuestos incorrectos de donde partió Doyle para la construcción de su regla fueron:

El descuento por aserrín que considera Doyle es de 4.5% y se ha visto que aun en sierra banda esta pérdida es mayor del 10%, de manera que en la regla Doyle el descuento por este concepto es muy pequeño.

Por concepto de costeras y orillas Doyle descuenta 4" que se deducen directamente del diámetro. Este descuento es excesivo pues ya vimos que estas pérdidas corresponden a un anillo circular de entre 0.75 y 1" de grueso y la deducción que debe hacerse en el diámetro variará entre 1.5" y 2", de manera que al descontar 4" del diámetro se hace una deducción doble de lo real, en el mejor de los casos.

La fórmula de la regla Doyle se dedujo, partiendo de la fórmula general de estimación maderera, de la siguiente manera:

$$v_{pt, Doyle} = (1 - 0.045) * \frac{\pi * (D_{sc} - 4)^2}{4} * \frac{L}{12}$$

$$v_{pt, Doyle} = \frac{0.955 * \pi * (D_{sc} - 4)^2}{4} * \frac{L}{12}$$

Si se multiplica $0.955 * \pi = 3.002 \approx 3$

$$v_{pt, Doyle} = \frac{3 * (D - 4)^2}{4} * \frac{L}{4 * 3}$$

$$v_{pt, Doyle} = \frac{(D - 4)^2}{4^2} * L$$

$$v_{pt, Doyle} = \left(\frac{D_{sc} - 4}{4} \right)^2 * L$$

Las principales deficiencias de esta regla consisten en que se descuenta una cantidad muy pequeña por concepto de aserrín y en que deduce una cantidad muy grande en pérdidas por costeras y orillas.

La consecuencia de estas deficiencias de la regla es que la misma muestra una gran inconsistencia en los errores para las diferentes trozas. Estos errores se acentúan más en trozas de pequeños diámetros, de tal manera que en trozas de 16' de longitud y 6" de diámetro el volumen real es 300% mayor que el consignado por la regla. Dicho error va disminuyendo a medida que aumenta el diámetro de las trozas hasta un diámetro de 28"; de ahí en adelante, la regla da volúmenes mayores de los que en la práctica se obtienen. En términos generales podemos concluir que la regla Doyle da errores por defecto en trozas de diámetros pequeños y errores por exceso en diámetros grandes.

Para trozas de 16 pies de longitud la fórmula de la regla Doyle es todavía más sencilla, pues basta elevar al cuadrado el diámetro de la sección menor de la troza sin corteza, una vez deducidas del mismo las 4" que representan las pérdidas por costeras y orillas.

$$v_{pt, Doyle, 16'} = \left(\frac{D_{sc} - 4}{4} \right)^2 * 16 = \frac{(D_{sc} - 4)^2}{16} * 16$$

$$v_{pt, Doyle, 16'} = (D_{sc} - 4)^2$$

En México el uso de esta regla entre los madereros es casi general, y ocasiona que éstos resulten beneficiados, ya que al ser aserradas las trozas casi siempre se obtiene un exceso de producción sobre la cantidad estimada por la regla Doyle.

El dueño del monte resulta perjudicado con el empleo de este instrumento, ya que el precio que recibe por su madera es menor que el que debería recibir, si la medición hubiera sido hecha con un instrumento que proporcionara datos correctos.

4.2.2.2.3 Regla Doyle-Scriber.

Como se ha visto, la regla Doyle tiene errores por defecto en diámetros pequeños y errores por exceso en diámetros grandes. La regla Scribner tiene errores por defecto en casi todos los diámetros. Ante esta situación y ante el hecho

de la tradición en el uso de la regla Doyle, que tenía ventajas para el comprador de madera en diámetros pequeños pero desventajas en diámetros mayores, se ideó la combinación de las reglas Doyle y Scribner utilizando para diámetros pequeños (hasta de 28”), los valores de la regla Doyle y para diámetros grandes (mayores de 28”), los de la regla Scribner, lo que forma una regla que siempre dará valores con errores por defecto, que propiciará pérdidas para el dueño del monte y beneficios para el comprador de la madera en rollo (**Anexo 5**).

Una de las medidas por las que se debería pugnar, es la elaboración de tablas o reglas madereras de estimación regionales, elaboradas por medio de fórmulas matemáticas con ajustes de aserradero para que las operaciones de compra-venta de madera en rollo fuesen equitativas y no resultaran perjudicados ni el comprador ni el vendedor de madera en rollo.

4.2.2.3 Método empírico.

Si un lote de trozas es seguido desde que entra a la sierra principal de la planta hasta que salen las tablas aserradas, y se anota con cuidado el volumen de madera aserrada obtenida de cada troza, se tendrá una serie de datos que pueden utilizarse para la construcción de una regla maderera de estimación basada en la producción media de las trozas.

Dichos datos también pueden utilizarse para determinar un factor de corrección y aplicarlo a cualquier regla conocida a fin de obtener medidas más aproximadas. El uso de esta regla estará limitado a la región, especie, espesor de la sierra, ancho y grueso de las tablas, espesor de las costeras, etcétera, que hayan servido de base para su construcción. Si alguno de estos factores cambia la regla ya no es aplicable.

Además de las reglas descritas se han construido un gran número de ellas, algunas de las cuales se han usado y se siguen usando en diversas zonas de Estados Unidos. En el **Anexo 6** se presenta una comparación entre los valores que arrojan las tablas citadas.

4.2.2.4 Descuentos por defectos.

Las reglas madereras de estimación proporcionan volumen de trozas sanas. Si éstas tienen defectos, corresponde al tasador hacer los descuentos que correspondan. Esto requiere criterio y pericia que sólo pueden adquirirse por la experiencia. Algunos de los defectos de las trozas están localizados en su interior y

su magnitud debe juzgarse por las huellas o señales que aparecen en las superficies externas y lateral de las trozas.

En México generalmente no se hacen descuentos por defectos; cuando el maderero encuentra una troza con uno o más defectos grandes la desecha. Si la magnitud del defecto es pequeña, la acepta. Muchas de las trozas que el maderero rechaza podrían ser aserradas, pero como los dueños de los montes generalmente desconocen el negocio maderero, aceptan por lo regular las indicaciones del maderero respecto a que trozas deben aceptarse y cuales rechazarse.

Los productos rollizos tales como trozas, morillos, pilotes mineros o marinos, postes de transmisión eléctrica o telefónica, etc., se pueden cubicar por cualesquiera de las fórmulas para cubicación de trozas y fustes, aunque usualmente se cubican utilizando la fórmula de Huber modificada, indicando si el volumen incluye o no la corteza.

4.3 Cubicación de Productos Labrados o Aserrados.

Los productos escuadrados ya sea con hacha o sierra se cubican generalmente multiplicando las tres dimensiones de los mismos, es decir, se les considera como paralelepípedos.

La madera aserrada se elabora en distintos espesores, anchos y longitudes. La madera comercial tiene una longitud mínima de 8 pies y aumenta de 2 en 2 pies.

La madera aserrada con menos de 8 pies de longitud se conoce en el mercado como madera aserrada de cortas dimensiones.

La anchura de las tablas varía de 2 en 2 pulgadas a partir de 6" y su espesor o grueso varía de 1/2", 3/4", 1", 1 1/2", 2", etcétera.

En la región central del país los gruesos varían de 1/2 pulgadas en adelante mientras que en el norte varían de 1" en adelante y no se elabora madera aserrada de menos de 1 pulgada de grueso. Esto se debe a que entre más pequeño es el grueso el desperdicio por concepto de aserrín es mayor y también a que los madereros de la región septentrional se rigen por las especificaciones norteamericanas.

Entre los productos aserrados tenemos los durmientes cuyas dimensiones son 7" * 8" * 8', cuyo volumen es de 0.088097 m³ y de 7" * 9" * 8.5' con volumen de 0.105303 m³.

Los juegos de cambio para vías de ferrocarril pueden tener las siguientes dimensiones y volúmenes tanto comerciales como reales (con refuerzo) consiguandos en la **Tabla 5**:

Tabla 5. Dimensiones de juegos de cambio para vías de ferrocarril.

Dimensiones	Volumen comercial		Volumen real m ³
	Pies tabla	m ³	
7" * 9" * 9'	47.25	0.1115	0.1248
7" * 9" * 10'	52.50	0.1239	0.1387
7" * 9" * 11'	57.75	0.1363	0.1526
7" * 9" * 12'	63.00	0.1487	0.1665
7" * 9" * 13'	68.25	0.1611	0.1803
7" * 9" * 14'	73.50	0.1734	0.1942
7" * 9" * 15'	78.75	0.1858	0.2081
7" * 9" * 16'	84.00	0.1982	0.2220
7" * 10" * 12'	70.00	0.1652	0.1850
7" * 10" * 13'	75.83	0.1789	0.2004
7" * 10" * 14'	81.66	0.1927	0.2158

También se tienen los cuadrados para minas de dimensiones variables, entre los cuales tenemos:

Cuadrado de 8" x 8" x 10' cuyo volumen = 0.125852 m³

Cuadrado de 10" x 10" x 10' cuyo volumen = 0.196644 m³

La longitud de estos cuadrados varía de 10' a 16' con aumento en 2' y sus secciones varían de 8 a 10 pulgadas.

También se fabrican cuadrados de 12" x 12" y su longitud puede variar entre 14 y 20 pies.

Además de los productos anteriores, se tienen las vigas y viguetas que en la actualidad se utilizan poco. Cuando se permitía el labrado con hacha se elaboraba esta clase de productos en gran escala pero ahora casi no se producen.

La chapa y la madera contrachapada, que tienen gruesos estándares y también el ancho, suelen medirse en unidades lineales o en unidades cuadradas.

5 Tablas de Volúmenes.

5.1 Introducción.

5.1.1 Definición.

Husch, Miller y Beers (1972) definen tabla de volúmenes “como una expresión tabulada que establece los volúmenes de árboles de acuerdo a una o más de sus dimensiones fáciles de medir, tales como el diámetro normal, la altura y la forma”.

El propósito de estas tablas es proporcionar una tabulación que exprese el “contenido medio” de árboles en pie de diversos tamaños y especies (Avery, 1967).

5.1.2 Utilización.

Las tablas de volúmenes son de gran importancia, ya que constituyen el fundamento de los inventarios forestales, los que a su vez son el cimiento de la silvicultura y de los programas de manejo forestal sustentable.

Las dificultades prácticas de hacer evaluaciones directas del volumen del arbolado en pie llevaron desde hace tiempo al desarrollo de metodologías tendientes a calcular, por medio de mediciones simples y directas (básicamente el diámetro del árbol a 1.30 m de altura, la altura total o comercial y algunas evaluaciones relacionadas con la forma de los individuos) los volúmenes que en conjunto sustentan los árboles de una determinada masa o rodal.

El origen de estas metodologías se remonta a 200 años de antigüedad. De hecho, quien recibe el crédito de haber elaborado la primera tabla “moderna” de volúmenes es Heinrich Cotta, quien hizo su publicación en el año de 1804 (Spurr, 1952).

Las técnicas en cuestión se ampliaron y difundieron a fines del siglo XIX y principios del XX en varios países de Europa. Investigadores como Hundeshagen, Klaupreten, Huber, Koning, Crundner, Schwappach y otros, establecieron las bases de las metodologías modernas para la mayor parte de los países europeos. Esta influencia tuvo repercusión en América, especialmente en los Estados Unidos y en Canadá, donde numerosos investigadores aportaron múltiples contribuciones, entre

ellos Bruce, Anderson, Claughton-Wallin, Behre, Wickenden, Schumacher, Mac Donald, Honer, etcétera.

5.1.3 Tipos de Tablas de Volúmenes.

Quien no esté familiarizado con el tema y se vea en la necesidad de llevar a cabo una revisión bibliográfica del mismo, se sentirá probablemente contrariado por la enorme cantidad de tipos de tablas de volúmenes existentes. Hay tablas *regionales, locales, estándar, gráficas, de una entrada, de dos entradas, tarifas, comerciales, totales*, etcétera. La existencia de un sinnúmero de clasificaciones hace necesario presentar una breve discusión de éstas.

En términos generales existen siete criterios substanciales en los que se apoya la gran mayoría de las clasificaciones:



- ⚡ Número de variables consideradas.
- ⚡ Procedimiento de construcción.
- ⚡ Extensión geográfica del área de aplicación.
- ⚡ Unidades en que se construye.
- ⚡ Cantidad del volumen individual de árboles en que se basan.
- ⚡ Tipo de material taxonómico que interviene.
- ⚡ El hecho de que sean aplicables a árboles individuales o a masas arboladas.

a) Número de variables consideradas.

Las variables que se pretenden estimar a través de la medición o evaluación de otras variables más sencillas de captar es, siempre, el volumen (variable dependiente). Sin embargo, las variables independientes que se escogen para el efecto no siempre son las mismas. Casi en todos los casos interviene el diámetro normal (*d*); pero éste puede considerarse en exclusividad o en combinación con otras variables, básicamente la altura (*h*) y alguna evaluación de la forma del fuste de los árboles (coeficientes mórficos, razones de forma, etcétera). En el primer caso, esto es, considerando como única variable al *d*, se da lugar a lo que se conoce como *tabla local de volumen, tarifa* o *tabla de una entrada*. En el segundo caso se llega a la obtención de una *tabla estándar* o *tabla de doble entrada*.

b) Procedimiento de construcción.

Por lo que se refiere a la forma en que se elaboran, las tablas y tarifas de volúmenes se clasifican en tres grupos principales.

-  Procedimientos gráficos.
-  Técnicas de regresión.




De cada uno de estos procedimientos se presenta una breve discusión más adelante.

c) Extensión geográfica del área de aplicación.

Es evidente que toda tabla de volúmenes es aplicable a una superficie forestal limitada. Es muy probable que una tabla de volúmenes elaborada para coníferas del centro de la República no sea válida para aplicarse en el norte del país, aun tratándose también de coníferas. Sin embargo, aun en el caso de áreas específicas, existen algunas tablas de volúmenes que tienen más limitaciones que otras. En este sentido, las tablas *regionales* y *locales* poseen un área de aplicación más restringida que la que corresponde normalmente a las *tablas estándar*.





d) Unidades en que se construyen.

Por cuanto se refiere a las unidades volumétricas en que se expresan las tablas, algunas de las más importantes son las siguientes:

-  Tablas de volúmenes en metros cúbicos, en pies cúbicos.
-  Tablas de volúmenes en pies tabla.
-  Tablas de volúmenes en cuerdas.

e) Cantidades del volumen individual de árboles en que se basan.

Dentro de esta categoría existen cuatro tipos que tienen mayor relevancia:

-  Tablas de volumen de fuste limpio.
-  Tablas de volumen de fuste total.
-  Tablas de volumen comercial.
-  Tablas de volumen total.

f) Tipo de material taxonómico que interviene en su construcción y para el cual son aplicables.


En varios países se acostumbra elaborar tablas de volúmenes separadamente para cada una de las especies forestales más importantes. En México existe un antecedente al respecto, el trabajo de Martínez Moreno (1937), quien elaboró tablas de volúmenes, particularmente para las especies *Pinus patula*, *Pinus hartweggi* y *Pinus ayacahuite*. Las tablas de volúmenes aplicables a una sola especie se conocen como **tablas específicas** (species tables), en tanto que aquellas cuyo objetivo es ser aplicables a varias especies se denominan **tablas compuestas** (composite tables).

Ha habido intentos, incluso de elaborar tablas de volúmenes únicas, esto es, aplicables a todas las especies forestales bajo la denominación de **tablas universales** (universe tables). Estas tablas, sin embargo, no han tenido mucho éxito.

g) El hecho de que sean aplicables a árboles individuales o a masas arboladas.

Si bien las tablas de volúmenes para la cubicación de árboles individuales representaron el primer esfuerzo en su construcción, en la actualidad se está generalizando, en algunos países y bajo ciertas condiciones, la elaboración de tablas de volúmenes aplicables directamente a masas. Estas tablas recurren a ciertas variables que se evalúan, por lo general aplicando técnicas de fotointerpretación sobre material aerofotográfico adecuado y aun sobre imágenes de satélite en escalas apropiadas o con base en el área basal total determinada con relascopios.

De todas las clasificaciones expuestas, la que resulta más importante por el momento es la que se basa en la extensión del área geográfica de aplicación y la especie. Con este criterio, las tablas de volúmenes pueden clasificarse en dos categorías:

 Tablas estándar.

 Tablas locales de volúmenes (tarifas).

Las tablas estándar, por lo regular, están elaboradas para satisfacer los requerimientos de áreas relativamente grandes. Por este motivo consideran como variables independientes al diámetro normal, a la altura y en ocasiones a algún indicador de la forma.

Las tablas locales, según va explícito en su nombre, consideran solamente arbolado de carácter estrictamente local. Las tablas locales se pueden construir con base en valores de campo (aprovechando incluso las dimensiones de los árboles muestra que se emplearon en la construcción de una tabla estándar) o bien, se pueden derivar de la tabla estándar directamente. Sobre estos procesos se habla más adelante. La relación que se considera en este caso es diámetro-volumen.

5.2 Etapas en la Elaboración de una Tabla de Volúmenes.

Las etapas fundamentales en la construcción de una tabla de volúmenes son:

- ⚡ Definición de objetivos.
- ⚡ Elección de la muestra.
- ⚡ Mediciones de campo.
- ⚡ Construcción de la tabla.

Con el objetivo de presentar una discusión secuencial del tema, se procederá a describir y comentar los puntos sobresalientes de las cuatro etapas antes enunciadas.

5.2.1 Definición de Objetivos.



En cualquier investigación que se lleve a cabo, el responsable debe precisar previamente los objetivos propuestos. Este punto, en la mayoría de los casos, es tomado con “demasiada ligereza”, aun cuando sobre el mismo debiera cimentarse todo el proceso de trabajo.

En los objetivos se deben considerar aspectos como el grupo botánico o especies que se considerarán en la tabla, el área de aplicación, la parte o las partes del árbol que se cubirán, las unidades que se emplearán, entre otros aspectos.

5.2.2 Elección de la Muestra.

Todo técnico que está por iniciarse en el proceso de elaboración de una tabla de volúmenes se siente, en esta etapa, incierto ante una serie de interrogantes fundamentales. Algunas de ellas son las siguientes:

- ⚡ ¿Cuántos árboles en total ha de medir?
- ⚡ ¿Cuántos árboles debe escoger por categoría diamétrica?
- ⚡ ¿Cuántos individuos ha de seleccionar por especie?

-  ¿Cuál es el criterio a seguir para escoger los árboles en el monte?
-  ¿Qué géneros o especies deberán entrar en la muestra?

Las interrogantes planteadas sólo pueden contestarse satisfactoriamente una vez que el investigador esté plenamente consciente y cierto de qué es lo que busca con el desarrollo de su investigación; más específicamente, y aplicado al problema que nos ocupa, qué motivos le inducen a construir una tabla de volúmenes, esto es, los objetivos.

Una vez definidos los objetivos, se estará en condiciones de establecer el grado de precisión estadística más adecuado y la magnitud de la confiabilidad que se está dispuesto a aceptar. El problema en estas condiciones cae enteramente dentro del campo del muestreo estadístico. Por medio de un muestreo preliminar se puede hacer una evaluación de la variabilidad de la población y en función de esta información es posible calcular qué tamaño de muestra es el que resulta óptimo para la población en estudio y los objetivos propuestos. Una orientación sobre las fórmulas y el criterio a seguir en el cálculo del tamaño muestral puede obtenerse del trabajo de Caballero D. (1971). Deseablemente conviene tener información sobre la variabilidad, la cual se puede obtener de un muestreo preliminar, información de otras fuentes similares o de alguna otra forma. Sin embargo, no siempre es posible llevar a cabo un muestreo preliminar, por limitantes económicas y/o de tiempo.

Con el objetivo de proporcionar una base inicial para que el técnico cuente con algunos antecedentes en qué apoyarse para la elección de la muestra, se señalan a continuación algunas consideraciones prácticas.

a) La muestra debe ser plenamente representativa de la población considerada.

Si la masa en estudio está constituida por arbolado maduro y decrepito, una muestra integrada por árboles jóvenes llevaría a la obtención de estimadores sesgados. En la misma forma, una muestra de árboles de una especie que no es frecuente en la población también conduciría a estimadores irreales si se aplica a árboles de otras especies.

b) El área de distribución de la muestra debe coincidir con el de la población.

Si la masa arbolada para la cual ha de elaborarse la tabla de volúmenes ocupa una superficie de 200 hectáreas, una muestra de árboles, escogidos todos en una zona aislada de únicamente cuatro hectáreas, es muy probable que conduzca a errores de consideración por reflejar efectos estrictamente locales que no deben ser extrapolados a toda la población. Este fenómeno es común en México, ya que por las dificultades que existen para desplazarse libremente en nuestros bosques, existe la tendencia a distribuir la muestra en el menor número de localidades.

c) La muestra debe incluir sujetos de todas las categorías diamétricas ocurrentes.

Las categorías diamétricas más abundantes en la masa deben ser también las más frecuentes en la muestra. Esto resulta lógico porque las categorías comerciales de arbolado que ocurren en mayor grado son también las que se aprovecharán con mayor intensidad; consecuentemente la precisión de estas categorías debe ser más alta, lo cual se obtiene a costa de aumentar el tamaño de la muestra para ellas.

d) El número de árboles que se requiere para asegurar la obtención de una buena tabla de volúmenes aumenta con la amplitud de variación del diámetro y de la altura.

El número mínimo aconsejable por cada categoría diamétrica y de altura es de 10 árboles (Chapman, 1924). El número total adecuado, de acuerdo con Chapman, se encuentra dentro del intervalo 500 - 2500 árboles. Belyea (1931) considera que se requieren de 100 a 2500 árboles, dependiendo de la especie y el tipo de tabla.

El Inventario Nacional Forestal, para la elaboración de tablas de volúmenes del género *Pinus* en diferentes entidades del país ha medido para los estados de Durango, Baja California, Nayarit, Sinaloa, Jalisco y Zacatecas, respectivamente, los números de árboles que se citan a continuación: 391, 200, 418, 259, 815 y 237.

5.2.3 Mediciones de Campo.

La construcción de tablas de volúmenes requiere que se cubiquen árboles muestra. Las medidas que deben tomarse en esta clase de árboles deben constituir una serie completa (aun cuando para una cierta clase de tabla pudiera parecer ventajoso tomar sólo ciertas medidas) ya que los estándares de utilización están variando constantemente y si las medidas no forman una serie completa, al cambiar el estándar de utilización, por ejemplo de 12" (30.48 cm) de diámetro en la punta a

8” (20.32 cm), habría necesidad de cubicar nuevos árboles muestra. Tomando una serie completa de medidas y archivando los datos respectivos no hay necesidad de volver a medir árboles muestra al cambiar los estándares de utilización o al elaborarse nuevos productos

5.2.3.1 Mediciones sobre arbolado derribado.

Chapman y Meyer (1949) clasifican las mediciones en dos categorías:

5.2.3.1.1 Mediciones para determinar el grupo o clase a que pertenece el árbol.

Las mediciones que se hacen para determinar el grupo o clase a que pertenece el árbol forman la base para la obtención de medidas de volúmenes de árboles. Estas mediciones son cuatro: diámetro normal, altura total, altura de fuste limpio e índice de forma.

a) Diámetro normal.

También conocido, incorrectamente, como diámetro a la altura del pecho (DAP). Esta medición se refiere al “diámetro con corteza que tiene el árbol a 1.30 m sobre el nivel del suelo”. En Estados Unidos de América el dato se toma a 4.5 pies (1.37 m) de altura, en tanto que en Europa, en México y otros países de América se hace a 1.30 m (4.25 pies).

Cuando el terreno es accidentado el criterio sobre el punto a partir del cual se considera la altura de 1.30 m es variable. Lo más común en México es hacer la medición a partir de la parte más alta de la base del árbol, al igual que se hace en Inglaterra y en Canadá. Sin embargo, en Estados Unidos y en algunos países europeos la medición debe hacerse a partir de la media de los puntos más alto y más bajo.

Para efectos de construcción de tablas de volúmenes, Chapman y Meyer señalan que cuando se trata de arbolado cuyo diámetro normal no excede de 36 pulgadas (91.4 cm), los valores se separan en clases diamétricas de una pulgada. El intervalo se aumenta a 2 pulgadas cuando el rango de los diámetros es mayor, como ocurre con el arbolado de la costa oeste de Estados Unidos. En nuestro país ha sido costumbre, en el Inventario Nacional Forestal y en varias empresas forestales, utilizar clases o categorías diamétricas de 5 cm, aunque probablemente

este valor resulte alto en algunas condiciones locales. Por esta razón, intervalos de 2 cm pudieran resultar más adecuados.

b) Altura total.

La altura total de cada uno de los árboles es otra medición que debe hacerse con especial cuidado. Cuando se trata de arbolado derribado la determinación puede hacerse por medio de una cinta graduada en centímetros.

En Estados Unidos y en Canadá, se acostumbra agrupar los valores de altura total en clases cuyo intervalo cubre 5 pies (1.52 m), 10 pies (3.05 m), y aún 20 pies (6.10 m) según sea la altura que alcance el arbolado o la especie de que se trate.

En México ha sido común, en el Inventario Nacional Forestal y en algunas instituciones, emplear categorías de altura con un intervalo de 5 m, aunque ha habido empresas que han establecido intervalos hasta del orden de un metro. En este aspecto, como en tantos otros, no existe fórmula estándar que concilie las necesidades de las empresas bajo todo tipo de circunstancias. El responsable de la elaboración de las tablas de volúmenes debe decidir qué intervalos diamétrico y de altura resultan más compatibles con el tipo de utilización que se habrá de dar a la tabla en cuestión.

c) Altura de fuste limpio.

La altura de fuste limpio es la longitud que existe a lo largo del fuste desde su base hasta la inserción de las primeras ramas vivas de la copa del árbol. Las alturas del fuste limpio pueden agruparse también en categorías, empleando un criterio semejante al explicado anteriormente.

d) Índice de forma.

Los árboles muestra se agrupan en clases de forma tomando como base el índice o coeficiente de forma de dichos árboles. La evaluación de índices de forma del arbolado requiere alguna o algunas mediciones adicionales, como es la evaluación del diámetro con corteza en un punto del árbol más arriba del diámetro normal.

El volumen de los árboles varía no sólo con su diámetro y su altura sino también con la forma de su fuste. Árboles de la misma especie con igual diámetro e igual altura pueden tener volúmenes diferentes debido a la variación de la forma

de los fustes que también se conoce como disminución gradual del diámetro del fuste. Tratándose de coníferas la forma de los fustes varía generalmente entre la de un paraboloides de revolución y la de un cono.

Uno de los mejores diámetros para determinar el índice o coeficiente de forma de un fuste es el que se halla situado en la mitad de la porción del fuste localizada arriba de la sección correspondiente a la altura de 1.30 m (**Figura 99**).

El coeficiente de forma puede expresarse así:

$$f = \frac{d \left(\frac{h-1.3}{2} \right)}{d}$$

Al determinarse el coeficiente de forma, los diámetros que definen su valor pueden medirse con corteza o sin ella, recomendándose hacerlo sin corteza ya que ésta no es uniforme a lo largo del fuste. Este coeficiente generalmente tiene un valor menor que la unidad. Las clases de forma generalmente se establecen con un intervalo de 0.05.

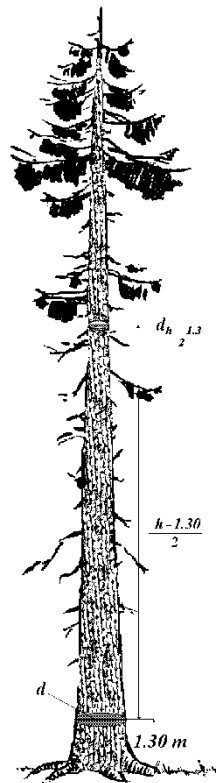


Figura 99. Base de cálculo del índice o coeficiente de forma.

5.2.3.1.2 Mediciones que se requieren para determinar las dimensiones de las trozas.

La segunda clase de mediciones para la elaboración de tablas de volúmenes tiene por objeto determinar las dimensiones de las trozas en que se dividen o se suponen divididos los árboles muestra. Al hacer esta división de los fustes de los árboles muestra se escoge una longitud estándar para todas las trozas, siendo las más comunes las de 8 pies (2.44 m) y 16 pies (4.87 m). En tablas de volúmenes para operaciones comerciales, a la longitud de las trozas se les da un refuerzo que para las de 16 pies (4.87 m) es generalmente de 4 pulgadas (10 cm), y para las de 8 pies (2.44 m) es de 2 pulgadas (5 cm).

a) Diámetro con corteza de secciones.

Se debe medir con la mayor precisión el diámetro de las dos secciones extremas o bien el diámetro con corteza de la sección media de la troza o los diámetros con corteza de esas tres secciones. Cualquiera de las tres alternativas que se escoja está en función de la fórmula de cubicación elegida (Ver sección de cubicación).

En caso de emplearse forcípula y de que las secciones no sean circulares, se deberán tomar dos lecturas colocadas en ángulo recto. El valor representativo es la media geométrica de las dos lecturas, aunque usualmente se utiliza la media aritmética.

b) Grosor de la corteza.

En cada una de las secciones en que se haya medido el diámetro se deberá determinar el grosor de la corteza. Al igual que en el caso anterior, es aconsejable hacer dos mediciones y emplear el promedio aritmético como valor representativo.

c) Longitud de las trozas.

Cuando la longitud de las trozas es desigual hay necesidad de medir cada una de ellas con una aproximación de un centímetro.

Si se pretende elaborar una tabla de volúmenes que incluya tocón y/o ramaje comercial es preciso hacer las mediciones correspondientes. Para el tocón basta medir su altura media y el diámetro de la sección superior o media. En el caso del

ramaje comercial resulta más conveniente medir la longitud y el diámetro medio de cada una de las ramas, o bien seccionar éstas en pequeñas trocillas.

Por lo que se refiere a la longitud de las trozas en que se divide el árbol es común, en Norteamérica, emplean cuatro pies (1.22 m), en el caso de árboles pequeños para la elaboración de raja para la industria de la celulosa del papel, ocho pies (2.44 m) para árboles de hasta 24 metros de altura que se habrán de cortar en trozas para la elaboración de aserrados y, finalmente, trozas de 16 pies (4.88 m) cuando se trata de árboles mayores (Chapman y Meyer, 1949).

La cubicación de los árboles individuales se realiza por los procedimientos descritos en el capítulo correspondiente.

5.2.3.1.3 Consideraciones generales en las mediciones para la determinación de clases de arbolado y dimensiones de las trozas.

En la determinación de alturas siempre es conveniente medir la altura total del árbol, incluyendo el tocón y la porción de la punta no comercial. Como los árboles al ser derribados generalmente se rompen en la punta, al tratar de medir la altura del mismo deben localizarse primero las distintas porciones del mismo en el caso de que se haya roto. Si esto no es posible es preferible desechar el árbol y elegir otro.

Las alturas de los árboles muestra se miden aproximando hasta 0.5 pies (0.15 m) pero en el caso del sistema métrico decimal se recomienda tomarlas, para arbolado apeado, hasta una aproximación de 5 cm o cuando menos a 10 cm. Tratándose de alturas comerciales, éstas se miden a partir de la sección de apeo hasta el diámetro mínimo de utilización en la punta.

Al medir las alturas comerciales en los árboles en pie hay que descontar la altura del tocón. Tratándose de árboles cuyo diámetro normal no excede de los 30 cm, se considera como altura media del tocón 15 cm; para árboles entre 30 y 60 cm se consideran 30 cm y si excede de 60 cm se consideran 45 cm.

Cuando la longitud se mide en trozas estándar, el número de éstas se aproxima al más cercano del fuste. Si, por ejemplo, la altura comercial es de 62 pies (18.89 m) se anotan 8 trozas de 8 pies (2.44 m) y si es de 59 pies (17.98 m) se anotan 7 trozas de 8 pies (2.44 m).

Los árboles muestra, como ya indicamos, generalmente se dividen o suponen divididos en trozas de longitud estándar. En casi todos los casos es conveniente medir el diámetro sin corteza de las secciones extremas de las diferentes trozas. Si éstas son de igual longitud y se han dividido en la práctica, es preferible medir con el auxilio de una regla graduada los diámetros sin corteza de las secciones extremas, aproximando hasta décimos de pulgada o hasta milímetros según las unidades utilizadas, tomando en consideración la forma de la sección transversal, la que nos indicará si existe la necesidad de medir un diámetro o dos. Una vez medido el diámetro sin corteza se miden los espesores de la corteza en los extremos del diámetro o diámetros y su suma, o el doble del promedio en el segundo caso, se suma al diámetro sin corteza para obtener el diámetro con corteza. Si el árbol no se ha dividido realmente en trozas o éstas no son de igual longitud se utiliza forcípula y se procede a la inversa, midiendo el diámetro con corteza, el espesor de la corteza con un *medidor de corteza* y se resta el doble del espesor medio de ésta para obtener el diámetro sin corteza.

5.2.3.2 Medición de árboles en pie.

Las medidas de caracterización como son el diámetro normal, la altura total, la altura de fuste limpio y el índice de forma pueden tomarse de la manera descrita anteriormente.

Todavía, hasta hace unos pocos años, la única alternativa en mediciones de campo para construir tablas de volúmenes, consistía en derribar y trocear los árboles muestra para obtener las mediciones requeridas. El avance de la dasometría ha hecho posible la construcción de aparatos que permiten medir diámetros y longitudes de cualquier sección a lo largo de los fustes de los árboles sin necesidad de apearlos. De estos aparatos, el relascopio y el telerrelascopio de Bitterlich son, sin lugar a dudas, los más conocidos en la actualidad. Estos instrumentos han hecho posible el contar con una segunda alternativa mucho más práctica que la original, en lo que a mediciones de campo se refiere.

5.2.3.3 Equipo y personal.

Se requiere una cadena o cinta de 20-30 m, dos forcípulas, un par de hachas, una cinta o regla graduada de 2 m, un medidor de corteza y libreta.

Siempre que sea posible, la medición de los árboles muestra debe hacerse en las zonas de aprovechamiento o áreas de corta, pero si no puede hacerse entonces se apean los árboles muestra para medirlos y cubicarlos. En este caso se debe

contar con motosierra o sierra de mano y el material que para ello se requiere (combustible, petróleo, cuñas, etcétera).

El trabajo se hace con cuadrillas de tres o de dos hombres, obteniéndose mejores resultados en el primer caso.

5.2.3.4 Secuencia de trabajo.

- 👤 Selección y marcado del arbolado que se utilizará como muestra.
- 👤 Medición de diámetro y altura de la copa, edad, incremento, etcétera, de requerirse.
- 👤 Localización de la sección transversal a 1.30 m.
- 👤 Derribo de los árboles muestra.
- 👤 Medición del diámetro normal con corteza.
- 👤 Medición del espesor de la corteza en los extremos de diámetro normal.
- 👤 Medición de altura total, altura de fuste comercial y de un diámetro superior para la determinación del índice de forma que puede ser $d\left(\frac{h-1.30}{2}\right)$.
- 👤 División real o supuesta del fuste dando refuerzo cuando así se establezca.
- 👤 Medición de diámetros de las secciones transversales de las trozas.
- 👤 Medición del espesor de la corteza en las secciones transversales de las trozas.
- 👤 Cubicación de trozas y de ramas comerciales cuando así proceda.
- 👤 Determinación del volumen de cada árbol.

5.2.3.5 Registro de datos.

Los datos de las mediciones se anotan en hojas individuales para cada árbol. El anverso de tales hojas de registro puede contener los datos que se muestran en la **Tabla 6**.

Las secciones se numeran en orden progresivo a partir de la sección de apeo. En el reverso de la hoja se anotan las medidas y datos adicionales, recomendándose estructurar la forma de registro de acuerdo a las necesidades específicas del trabajo ya que en ocasiones se requerirán otros datos como los ecológicos.

Tabla 6. Hoja de registro para la toma de datos en la cubicación de árboles para la construcción de tablas de volúmenes.

Totolapan, Méx		San Felipe de Arriba		La Joya	
Municipio y Edo. 1		Nombre del predio P. hartwegii		Paraje 01/mar/2003	
Número de árbol 0.445		Especie 18		Fecha 22.5	
Diámetro normal (m) 18.3		Grosor corteza (mm) 14.3		Altura total (m) 0.375	
Altura de fuste limpio (m)		Altura comercial (m)		Diámetro superior (m)	
Sección núm.	Altura (m)	Diámetro s/c (cm)	Espesor corteza (mm)	Diámetro c/c (cm)	Observaciones
Tocón	0.30	45.5	18	49.1	
1	2.49	42.8	17	45.2	
2	2.49	40.2	15	43.2	
3	2.49	37.1	12	39.5	
....	

5.3 Construcción de Tablas de Volúmenes.

5.3.1 Construcción de Tarifas.

5.3.1.1 Revisión de conceptos.

5.3.1.1.1 Datos bivariados.

Este término se emplea para describir dos conjuntos de datos que varían (difieren uno del otro), aun cuando estén relacionados de alguna manera. Matemáticamente estos datos bivariados son pares ordenados, que se denominan como X e Y . donde X es el valor de la primera variable e Y es el valor de la segunda; se dice que son ordenados porque el valor de X se escribirá siempre en primer lugar, y se dice que están aparejados porque ambos valores se relacionan por alguna regla de correspondencia, los cuales pueden ser: el peso y la altura de una persona, el diámetro y altura de un árbol, etcétera.

Al asignar nombres a las variables, se usa X para la variable de entrada o independiente e Y para la variable de salida o dependiente, la de entrada es la que se puede controlar o medir y la variable de salida es la que se desea predecir.

5.3.1.1.2 Regresión y correlación.

Cuando se cuenta con información acerca de dos o más variables relacionadas (o concomitantes), es natural buscar un modo de expresar la forma de la relación funcional, además de conocer la consistencia de la misma. Esto es, no se busca únicamente una función matemática que defina de que manera estén relacionadas las variables, sino que exprese también con que precisión se puede predecir el valor de una variable si se conocen los valores de la o las variables con que está relacionada. Las técnicas asociadas para lograr estos objetivos son los métodos de regresión y los de correlación. Los métodos de regresión se usan para determinar la mejor relación funcional entre las variables, mientras que los métodos de correlación se utilizan para medir el grado de asociación entre dos variables.

En cualquier análisis se espera que la función postulada (supuesta) represente algún mecanismo básico de asociación o causal, entre las variables consideradas. Sin embargo, la ciencia no está siempre tan avanzada para que las variables y los mecanismos básicos de un proceso se conozcan con certeza. En tales casos, los métodos de regresión y correlación aun pueden ser útiles como instrumentos analíticos y de predicción.

En esa situación es conveniente hacer la siguiente advertencia, simplemente por haber supuesto una relación funcional particular y haber seguido un procedimiento computacional específico, no suponga que existe una relación **causal entre las variables**. Esto es, por haber encontrado una función que ajuste bien a un conjunto de datos observados no se está necesariamente en posición de inferir que un cambio en una variable cause un cambio en otra variable. El análisis estadístico (en este caso, un análisis de regresión y de correlación) es solamente un instrumento de ayuda en el análisis e interpretación de resultados.

a) Correlación lineal.

El análisis de correlación se dirige sobre todo a medir la fuerza de una relación entre variables. El coeficiente de correlación lineal, que se simboliza con la letra griega rho (ρ) la medida paramétrica o con r el estimador, es la medida de la fuerza de la relación lineal entre dos variables.

La fortaleza de la relación se determina mediante la magnitud del efecto que cualquier cambio en una variable ejerce sobre otra. Utilizando X e Y como variables, si al crecer X no se observan modificaciones definidas en los valores Y .

se puede decir que no existe correlación. Si cuando aumenta X se observan cambios definidos en los valores de Y , se puede decir que existe correlación, la cual puede ser positiva (+) o negativa (-).

Para saber si existe o no correlación lineal en datos bivariados, de una manera rápida, puede utilizarse un diagrama de dispersión, que consiste básicamente en ordenar los datos en un sistema de coordenadas, X en el eje horizontal e Y en el vertical (**Figura 100**).

Al observar un diagrama de dispersión, se puede decir si la correlación lineal existente es baja, alta o no hay correlación, si los puntos correspondientes a los valores de las variables se atraen o se dispersan mutuamente con relación a los puntos o valores que formen una línea recta, que será la correlación lineal perfecta. El hecho de no existir una correlación lineal, no quiere decir que no exista otra correlación no lineal, y dependiendo de la dispersión de los datos será fuerte o baja.

El coeficiente de correlación lineal (r), tendrá siempre un valor entre -1 y +1, siendo los valores de +1 y -1 para la correlación perfecta, positiva o negativa, respectivamente. La correlación será alta cuando el valor de " r " se aproxime a +1 o -1, y será baja cuando se acerque a cero (0), que es cuando no existe correlación.

Para conocer el valor de la fuerza de atracción entre variables o valor del coeficiente de correlación lineal " r ", existen dos métodos: gráfico y de fórmulas matemáticas.

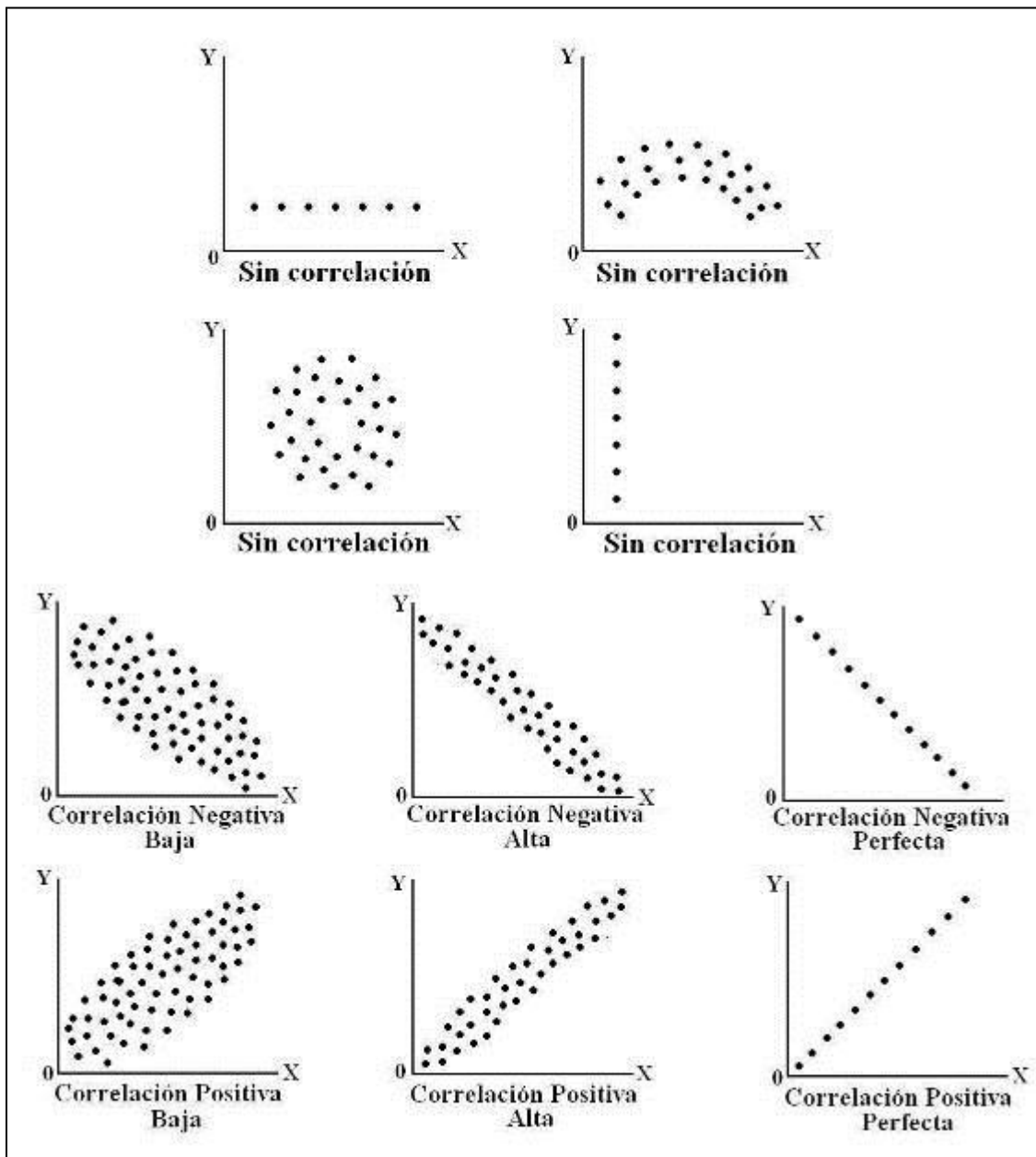


Figura 100. Diagramas de dispersión con tipos de correlaciones lineales.

Método gráfico.

En el método gráfico, teniendo el diagrama de dispersión de las variables, se engloban los puntos en una elipse, que será tan alargada o angosta como lo permitan los mismos valores. Posteriormente, se mide el diámetro mayor (D) y el diámetro menor (d), y con la relación $r = 1 - \frac{d}{D}$, se puede conocer gráficamente el

valor de r . El signo de r , depende de la posición general de D . Esta determinación de r no es muy confiable, pues estaría en función de lo alargado que se construya la elipse (**Figura 101**).

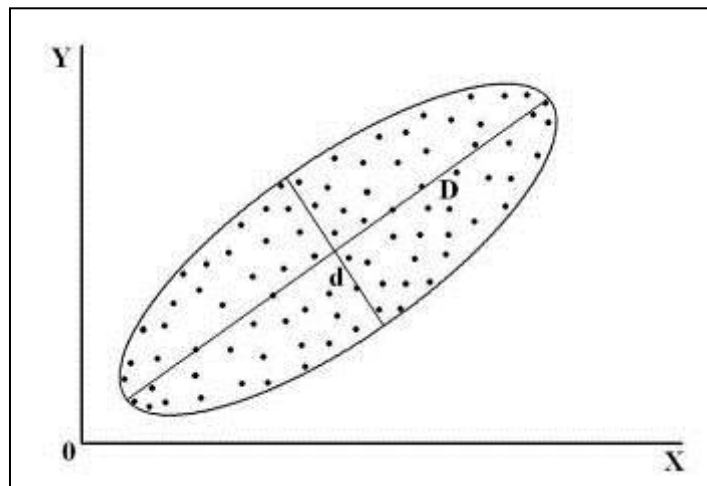


Figura 101. Cálculo gráfico del coeficiente de correlación.

Método de fórmulas matemáticas.

En el método de fórmulas matemáticas que se considera el más preciso y confiable, el valor del coeficiente de correlación (r), se calcula mediante la fórmula:

$$r = \frac{\sum XY - \frac{(\sum X)(\sum Y)}{n}}{\sqrt{\left[\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n} \right] * \left[\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n} \right]}}$$

O su equivalente:

$$r = \frac{n(\sum XY) - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{\left[n(\sum X^2) - (\sum X)^2 \right] * \left[n(\sum Y^2) - (\sum Y)^2 \right]}}$$

Ejemplo de cálculo de r :

Considérese una muestra de $n = 10$ árboles y las variables a correlacionar $X =$ diámetro normal e $Y =$ volumen (Tabla 7).

Tabla 7. Tabulación para el cálculo del coeficiente de correlación (r).

Diámetro Normal (X)	Volumen Total (Y)	X^2	Y^2	XY
15.4	0.072	237.16	0.005184	1.1088
19.9	0.154	396.01	0.023716	3.0646
24.9	0.307	620.01	0.094249	7.6443
30.2	0.490	912.04	0.240100	14.7980
35.4	0.618	1253.16	0.381924	21.8772
40.5	1.308	1640.25	1.710864	52.9740
46	1.776	2116.00	3.154176	81.6960
50.5	2.020	2550.25	4.080400	102.0100
55.8	2.715	3113.64	7.371225	151.4970
60.2	3.922	3624.04	15.382084	236.1044
$\Sigma X = 378.8$	$\Sigma Y = 13.382$	$\Sigma X^2 = 16462.56$	$\Sigma Y^2 = 32.443922$	$\Sigma XY = 672.7743$
$(\Sigma X) * (\Sigma Y) = 5069.1016$				
$(\Sigma X)^2 = 143489.44$				
$(\Sigma Y)^2 = 179.077924$				

Sustituyendo en la fórmula:

$$r = \frac{10 * (672.7743) - (378.8)(13.382)}{\sqrt{[10 * (16462.56) - (378.8)^2] * [10 * (32.443922) - (13.382)^2]}}$$

$$r = \frac{10 * (672.7743) - (5069.1016)}{\sqrt{[10 * (16462.56) - (143489.44)] * [10 * (32.443922) - (179.077924)]}}$$

$$r = \frac{1658.6414}{\sqrt{21136.16 * 145.361296}} \qquad r = \frac{1658.6414}{1752.8205} \qquad r = 0.9463$$

El coeficiente de correlación (r), resultó ser **0.9463**, lo que nos quiere decir que la fuerza de atracción o el grado de asociación entre esas dos variables es alto y, naturalmente, positivo.

Concluir que, cuando existe un coeficiente de correlación alto existe una relación o un grado de asociación fuerte entre variables no quiere decir que exista una relación de causa-efecto o una relación de dependencia entre una variable y la otra.

b) Regresión.

Uno de los objetivos primarios del análisis de regresión consiste en hacer predicciones, y para lograr este objetivo se requiere encontrar el modelo de regresión que mejor se ajuste a los datos observados.



Para poder elegir una relación funcional particular como representativa de la población bajo estudio existen dos métodos muy empleados: 1) Una consideración analítica del fenómeno de que se trate. 2) Un examen de diagramas de dispersión en forma de gráfica de los datos observados. Aunque se prefiere el primer método, el segundo no debe subestimarse, ya que esto se hace para tener una representación gráfica de la posible relación entre las variables. Si existe una relación sencilla los puntos trazados tendrán una tendencia a formar una configuración (línea recta o curva).

El tipo de configuración (línea recta, curva parabólica, curva exponencial, etcétera) influirá en el modelo de regresión por ajustarse. En este caso en particular se supondrá una relación recta sencilla.

Existen en regresión dos tipos de variables: las dependientes y las independientes. Para distinguir las dos variables en estudio de la regresión, se suele designar a Y como variable dependiente y a X como la independiente.

Las variables dependientes, como su nombre lo indica, dependen o están supeditadas a los valores de las variables independientes; éstas, las independientes, pueden adoptar cualquier valor dentro de un rango dado de variación. Por medio del análisis de regresión se pretende encontrar la relación entre ambas variables, a fin de estimar valores de Y en función de valores de X .

Ejemplo de necesidades de predicción, mediante regresión:

-  Predecir el volumen de leña (Y) de un árbol cualquiera, con base en el diámetro normal (X) de dicho árbol.
-  Predecir el cambio en la velocidad de un incendio (Y), al aumentar la pendiente del terreno (X).

- 👤 Predecir el volumen de un árbol (Y) con base en su diámetro normal (X).
- 👤 Predecir la altura de un árbol (Y) con base en su diámetro normal (X).
- 👤 Predecir el proceso nacional de deforestación (Y) con base en el crecimiento demográfico (X).

El ingeniero forestal desea a menudo determinar la ecuación de mejor ajuste, a fin de expresar la relación entre los valores de las variables, para lo cual cuenta inicialmente con diversas relaciones llamadas ecuaciones de predicción, cuya forma general es:

Lineal simple:	$Y = a + bX + E$
Polinomial:	$Y = a + bX + cX^2 + E$
Exponencial (no lineal)	$Y = a e^{bX} + E$
Potencial (no lineal)	$Y = a X^b + E$

Donde:

Y = variable dependiente.

a, b, c = coeficientes de regresión.

X = variable independiente.

E = Un error aleatorio que hace que la relación no sea perfecta.

e = Base de los logaritmos naturales.

El término E tiene importancia en el estudio de propiedades estadísticas del modelo, las que no se abordan en este texto. Por ello, en lo que sigue se obviará en algunos casos, sin que por ello se falte a la atención de lo sustantivo en los términos que aquí se abordan.

Las ecuaciones de predicción no lineales pueden transformarse en lineales por medio del uso de logaritmos u otras transformaciones.

La ecuación $Y = a X^b$, transformándola mediante logaritmos toma la siguiente forma:

$$\log Y = \log a + b \log X$$

La ecuación $Y = a b^X$, transformándola mediante logaritmos y sin considerar el término E , toma la siguiente forma:

$$\log Y = \log a + X \log b$$

Cabe hacer la aclaración de que existen modelos de predicción o de regresión lineal múltiple en donde intervienen una variable dependiente y dos o más variables independientes y toman la forma generalizada de:

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + \dots + b_n X_n + E$$

Donde:

Y = variable dependiente.

$b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ = Coeficientes de regresión.

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ = Variables independientes.

En un modelo de regresión (o de estimación o de predicción), los coeficientes de regresión b_0, b_1, b_2 , etc. son los que determinan el ajuste de la recta o curva, según la tendencia de los puntos graficados y/o del modelo elegido, y tales coeficientes se calculan mediante procedimientos que se describirán más adelante.

Una vez que se ha decidido el tipo de función matemática que mejor se ajusta a las variables en estudio (ya sea mediante el método analítico o de diagramas de dispersión y de observación de la tendencia), se presentan las siguientes interrogantes ¿Cómo se hace para ajustar una curva a un conjunto de datos? O bien ¿Cómo se obtiene la evaluación de los parámetros? Nuevamente se está ante el problema de escoger entre varios métodos de estimación. El camino elegido debe, por supuesto, proporcionar las *mejores* estimaciones. Uno de los métodos que proporciona ajustes aceptables o confiables es el llamado método de mínimos cuadrados.

Para el estudio del método de los mínimos cuadrados supóngase que $\hat{Y} = a + bX$ es la ecuación de una recta, donde \hat{Y} representa el valor estimado de Y que corresponde a uno particular de X .

El criterio de mínimos cuadrados requiere que se encuentren las constantes a y b , tales que $\sum (Y - \hat{Y})^2$ sea tan pequeña como se pueda, o sea un mínimo; $\sum (Y - \hat{Y})^2 = \text{mínimo}$, léase la sumatoria de los cuadrados de las diferencias de los valores de Y menos los valores de \hat{Y} sea igual a un mínimo (**Figura 102**).

$$\hat{Y} = a + bX$$

a = intersección al eje de las ordenadas cuando $X = 0$.

b = pendiente de la recta.

El criterio de mínimos cuadrados requiere que:

$$\sum (Y - \hat{Y})^2 = \text{mínimo}$$

$$(Y_1 - \hat{Y}_1)^2 + (Y_2 - \hat{Y}_2)^2 + (Y_3 - \hat{Y}_3)^2 + \dots + (Y_n - \hat{Y}_n)^2 = \text{mínimo}$$

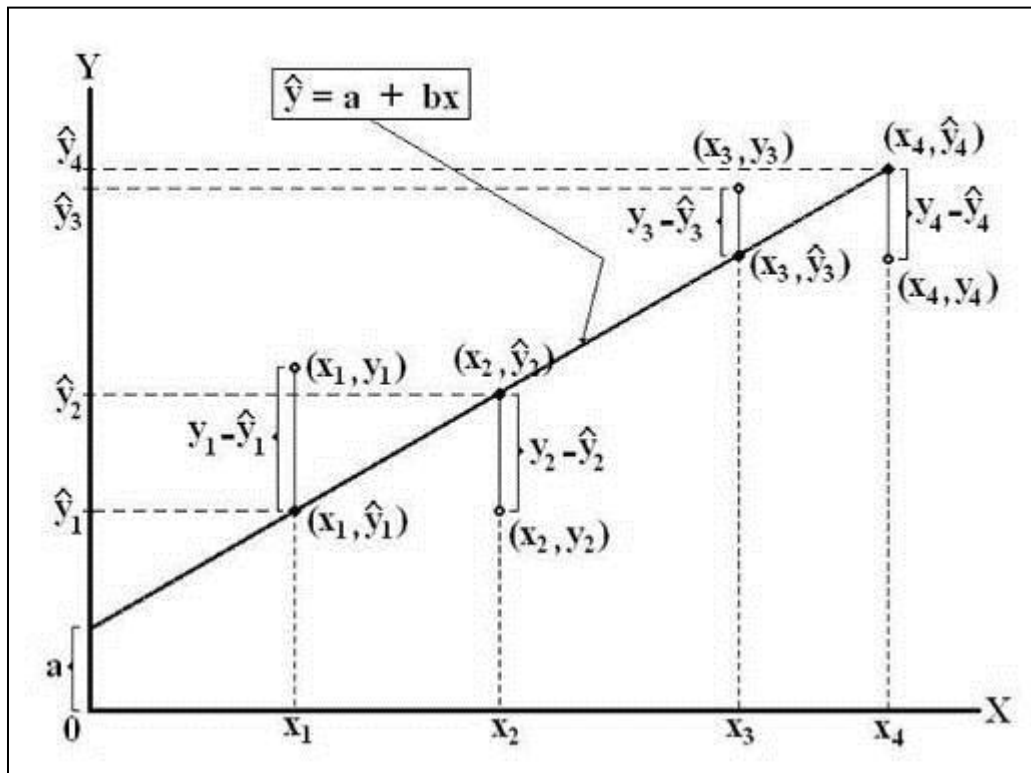


Figura 102. Magnitud de desviaciones respecto a línea de “mejor ajuste”.

La ecuación de una línea que mejor se ajuste está completamente determinada por su pendiente b y por su intersección con el eje de las ordenadas a . Los valores de estas constantes se obtienen haciendo que la derivada de la suma de los cuadrados de las desviaciones $\sum (Y - \hat{Y})^2$ respecto a cada una de ellas sea

igual a cero y despejando de las ecuaciones resultantes los valores de los coeficientes a y b .

En $\sum(Y - \hat{Y})^2$ sustituyendo el valor $\hat{Y} = a + bX$, resulta $\sum(Y - a - bX)^2$ que debe ser un mínimo = q .

Si se hace que la derivada de q con respecto a “ a ” sea igual a cero y con respecto a “ b ” sea también igual a cero quedaría:

$$\frac{dq}{da} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dq}{db} = 0$$

Se obtiene:

$$\frac{dq}{da} = \frac{d \sum(Y - a - bX)^2}{da} = 0$$

$$\frac{dq}{da} = 2 \sum(Y - a - bX)(-1) = 0$$

$$\frac{dq}{da} = -\sum Y + na + b \sum X = 0$$

$$\sum Y = na + b \sum X$$

$$\sum Y - b \sum X = na$$

$$na = \sum Y - b \sum X$$

$$a = \frac{\sum Y - b \sum X}{n} = \frac{\sum Y}{n} - \frac{b \sum X}{n}$$

Como $\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$ e $\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n}$ se tiene finalmente que:

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

Asimismo, si se hace que la derivada de q con respecto a “ b ” sea también igual a cero tendríamos:

$$\begin{aligned}\frac{d \sum (Y - a - bX)^2}{db} &= 0 \\ 2 \sum (Y - a - bX)(-X) &= 0 \\ -\sum XY + a \sum X + b \sum X^2 &= 0 \\ \sum XY &= a \sum X + b \sum X^2\end{aligned}$$

Sustituyendo en esta ecuación el valor de $a = \bar{Y} - b\bar{X}$, se tiene:

$$\begin{aligned}\sum XY &= (\bar{Y} - b\bar{X}) \sum X + b \sum X^2 \\ \sum XY &= \bar{Y} \sum X - b\bar{X} \sum X + b \sum X^2\end{aligned}$$

Dividiendo entre n

$$\begin{aligned}\frac{\sum XY}{n} &= \frac{\bar{Y} \sum X}{n} - \frac{b\bar{X} \sum X}{n} + \frac{b \sum X^2}{n} \\ \frac{\sum XY}{n} &= \bar{X} \bar{Y} - b\bar{X}^2 + \frac{b \sum X^2}{n} \\ \frac{b \sum X^2}{n} - b\bar{X}^2 &= \frac{\sum XY}{n} - \bar{X} \bar{Y} \\ b \left(\frac{\sum X^2}{n} - \bar{X}^2 \right) &= \frac{\sum XY - n\bar{X}\bar{Y}}{n}\end{aligned}$$

$$b = \frac{\sum XY - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X^2 - n\bar{X}^2}$$

$$b = \frac{\sum XY - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X^2 - n(\bar{X})^2}$$

De esta manera, para un modelo de regresión lineal simple, se llegan a conocer los coeficientes de regresión (a y b) necesarios para lograr el ajuste de los diferentes valores que se tratan de relacionar. También, se suelen usar los símbolos \hat{a} y \hat{b} para reflejar que se trata de estimadores de un valor verdadero que es desconocido. En la **Tabla 8** se presenta un ejemplo del cálculo de los coeficientes de regresión a y b

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$$

Tabla 8. Tabulación para el cálculo de coeficientes en regresión lineal simple.

Árbol número	Diámetro normal (cm) X	Grosor de Corteza (mm) Y	XY	X ²
1	2.3	0.39	0.897	5.29
2	3.3	0.45	1.485	10.89
3	4.2	0.51	2.142	17.64
4	5.1	0.54	2.754	26.01
5	6.1	0.59	3.599	37.21
6	7.2	0.62	4.464	51.84
7	8.1	0.65	5.265	65.61
8	9.4	0.70	6.580	88.36
9	10.4	0.66	6.864	108.16
10	11.5	0.79	9.085	132.25
11	12.5	0.81	10.125	156.25
12	13.4	0.85	11.390	179.56
13	14.8	0.63	9.324	219.04
14	16.3	0.60	9.780	265.69
15	16.8	1.10	18.480	282.24
n = 15	ΣX = 141.4 $\bar{X} = 9.427$	ΣY = 9.89 $\bar{Y} = 0.659$	ΣXY = 102.234	ΣX² = 1646.04

Al graficar los valores de diámetro normal y grosor de corteza de *Pinus patula* Schl. et Cham., los puntos sugieren un ajuste rectilíneo, justificándose la suposición de que la ecuación será de la forma

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}x$$

Aplicación de las fórmulas:

$$\hat{b} = \frac{\sum XY - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X^2 - n(\bar{X})^2} = \frac{102.234 - 15(9.427)(0.659)}{1646.04 - 15(9.427)^2} = \frac{102.234 - 93.186}{1646.04 - 1333.025}$$

$$\hat{b} = \frac{9.048}{313.015} = 0.0289 \quad \hat{b} = 0.0289$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}(\bar{X})$$

$$\hat{a} = 0.659 - (0.289 * 9.427) = 0.659 - 0.272$$

$$\hat{a} = 0.387$$

Finalmente la ecuación de mejor ajuste con base en el modelo elegido toma la forma de:

$$\hat{Y} = 0.387 + 0.0289 X \quad \text{o} \quad \hat{g}_c = 0.387 + 0.0289 d$$

$\hat{Y} = \hat{g}_c$ = Grosor de corteza estimado.

$X = d$ = Diámetro normal.

Ejemplo de estimación del grosor de corteza. Si $d = 10$ cm

$$\hat{Y} = 0.387 + 0.0289d = 0.387 + (0.0289 * 10)$$

$$\hat{Y} = 0.387 + 0.289$$

$$\hat{Y} = 0.676 \text{ mm}$$

Esto indica que para un árbol de diámetro normal de 10 cm se espera que tenga un grosor de corteza de 0.676 mm.

5.3.1.2 Construcción de tarifas por mínimos cuadrados.

Cuando el volumen de un árbol se representa en función de su diámetro normal, $v = f(d)$, la tendencia puede quedar definida por una línea cuya ecuación toma la forma del modelo $\hat{v} = a + bd^2$ que es un modelo lineal que de manera general podemos enunciar como $\hat{y} = a + bx$ el cual puede ajustarse por el método de mínimos cuadrados, en la misma forma que en el caso de regresión lineal simple.

En los modelos anteriores se tiene:

\hat{v} = Volumen estimado = \hat{y} = Variable dependiente.

d^2 = Cuadrado del diámetro normal = x = Variable independiente.

a = Intersección con el eje de las ordenadas.

b = Pendiente de la línea = coeficiente de regresión.

Teniendo un juego de valores bivariados, las constantes a y b se pueden calcular por el método de mínimos cuadrados y una vez determinadas se elabora la tabla calculando el volumen en base a las marcas de clase de cada categoría diamétrica.

Si $d^2 = x$ y $v = y$, el procedimiento de cálculo de las constantes por el método de mínimos cuadrados precisa hacer que:

$$\sum (y - \hat{y})^2 = \text{Mínimo}$$

De acuerdo a nuestro modelo tendríamos:

$$\sum (y - a - bx)^2 \quad \text{Mínimo para } \hat{y} = a + bx$$

Para lograr que estas expresiones tengan un valor mínimo se requiere que las derivadas respecto a las constantes de estas expresiones sean igual a cero, lo que nos da un sistema de dos ecuaciones simultáneas denominadas ecuaciones normales con dos incógnitas, las cuales nos darán los valores de a y b

correspondientes a la ecuación de la línea de mejor ajuste de acuerdo al modelo. Tales ecuaciones, como vimos anteriormente son:

$$\sum y - na - b \sum x = 0$$

$$\sum xy - a \sum x - b \sum x^2 = 0$$

Estas ecuaciones se pueden resolver directamente sustituyendo los valores conocidos o despejando y calculando previamente los coeficientes **a** y **b**, lo que nos da:

$$a = \bar{y} - b \bar{x}^2$$

$$b = \frac{\sum xy - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x^2 - n \bar{x}^2}$$

Para resolver estas ecuaciones es conveniente tabular los valores que en ellas aparecen para sistematizar y facilitar los cálculos. Si se tienen los valores de diámetro y volumen de 42 árboles como los que se ejemplifican en la **Tabla 9**, se tendría la siguiente tabulación:

Tabla 9. Tabulación de datos para el cálculo de coeficientes en regresión lineal simple.

Árbol núm.	d (m) x_1	h (m) x_2	v (m ³) y	d ² x	d ⁴ x^2	d ² v xy
1	0.10	11.50	0.04113941	0.010000	0.00010000	0.00041139
2	0.11	16.48	0.08141550	0.012100	0.00014641	0.00098513
3	0.12	14.62	0.07242534	0.014400	0.00020736	0.00104292
4	0.12	13.26	0.06507710	0.014400	0.00020736	0.00093711
5	0.14	19.85	0.15286858	0.018225	0.00033215	0.00278603
6	0.14	19.75	0.16976895	0.019600	0.00038416	0.00332747
7	0.15	14.64	0.10791765	0.022500	0.00050625	0.00242815
8	0.16	17.50	0.15985030	0.024025	0.00057720	0.00384040
9	0.18	22.40	0.31656407	0.032400	0.00104976	0.01025668
10	0.19	17.80	0.19527302	0.036100	0.00130321	0.00704936
11	0.20	18.12	0.27532348	0.040000	0.00160000	0.01101294
12	0.21	25.55	0.39083763	0.042025	0.00176610	0.01642495

Tabla 9. Tabulación de datos para el cálculo de coeficientes en regresión lineal simple.

Árbol núm.	d (m) x_1	h (m) x_2	v (m ³) y	d ² x	d ⁴ x^2	d ² v xy
13	0.21	24.90	0.42662525	0.044100	0.00194481	0.01881417
14	0.22	26.15	0.52333369	0.048400	0.00234256	0.02532935
15	0.24	19.60	0.34746809	0.057600	0.00331776	0.02001416
16	0.25	28.10	0.68603381	0.062500	0.00390625	0.04287711
17	0.26	21.90	0.50617566	0.067600	0.00456976	0.03421747
18	0.27	24.42	0.57129066	0.072900	0.00531441	0.04164709
19	0.28	27.25	0.85952528	0.075625	0.00571914	0.06500160
20	0.28	23.90	0.76611803	0.078400	0.00614656	0.06006365
21	0.28	22.60	0.37201563	0.078400	0.00614656	0.02916603
22	0.30	27.57	0.84928622	0.087025	0.00757335	0.07390913
23	0.30	20.85	0.46505595	0.090000	0.00810000	0.04185504
24	0.32	25.15	1.17355017	0.102400	0.01048576	0.12017154
25	0.34	21.80	0.57459295	0.112225	0.01259445	0.06448369
26	0.34	30.40	1.18621468	0.115600	0.01336336	0.13712642
27	0.35	29.17	1.33317148	0.119025	0.01416695	0.15868074
28	0.36	25.89	1.05015414	0.129600	0.01679616	0.13609998
29	0.40	19.10	0.94720474	0.160000	0.02560000	0.15155276
30	0.42	24.30	1.76560005	0.176400	0.03111696	0.31145185
31	0.43	28.26	1.80422435	0.184900	0.03418801	0.33360108
32	0.45	28.70	1.46036099	0.202500	0.04100625	0.29572310
33	0.46	30.30	2.73468371	0.211600	0.04477456	0.57865907
34	0.48	31.12	2.37272573	0.225625	0.05090664	0.53534624
35	0.48	29.87	2.54580367	0.230400	0.05308416	0.58655317
36	0.55	30.92	3.49303407	0.302500	0.09150625	1.05664281
37	0.56	36.03	3.29416287	0.313600	0.09834496	1.03304948
38	0.60	32.07	3.17509399	0.360000	0.12960000	1.14303384
39	0.62	35.95	4.58425276	0.384400	0.14776336	1.76218676
40	0.64	29.85	3.62021053	0.409600	0.16777216	1.48283823
41	0.65	33.90	4.95594463	0.422500	0.17850625	2.09388661
42	0.66	27.40	3.42479670	0.435600	0.18974736	1.49184144
Suma	13.78	1028.89	53.89717151	5.646800	1.41458473	13.98632613
Prom	0.33	24.50	1.28326599	0.134448	0.03368059	0.33300777

Suponiendo que el modelo de mejor ajuste es $\hat{Y} = a + bx \equiv \hat{v} = a + bd^2$, recurrimos a las ecuaciones que nos dan los valores de a y de b en las que requerimos la tabulación de datos para la obtención de sus elementos.

$$\begin{aligned}\sum x &= 5.646800 & \bar{x} &= 0.13444762 \\ \sum x^2 &= 1.41458473 & \bar{y} &= 1.28326599 & n &= 42 \\ \sum xy &= 13.98632613 & \bar{x}^2 &= 0.01807616 \\ \overline{nd^2} \bar{v} &= 7.24634638 & \overline{nd^2} &= 0.75919882\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión que nos da el valor de b :

$$b = \frac{\sum xy - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x^2 - n \bar{x}^2} = \frac{13.98632613 - 7.24634638}{1.41458473 - 0.75919882} = \frac{6.73997975}{0.65538591}$$

$$b = 10.28398635$$

Sustituyendo el valor de b en la expresión que nos da el valor de a :

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 1.28326599 - (10.28398635 * 0.13444762)$$

$$a = -0.09939149$$

Con lo que nuestra ecuación de la línea de mejor ajuste de acuerdo a nuestro modelo, queda finalmente en:

$$\hat{y} = -0.09939149 + 10.28398635 x \quad \text{o} \quad \hat{v} = -0.09939149 + 10.28398635 d^2$$

De otra forma, si partimos de nuestras ecuaciones normales tendremos:

$$\begin{aligned}\sum y - na - b \sum x &= 0 \\ \sum xy - a \sum x - b \sum x^2 &= 0\end{aligned}$$

Sustituyendo valores:

$$53.89717151 - 42 a - 5.646800 b = 0$$

$$13.98632613 - 5.646800 a - 1.41458473 b = 0$$

Dividiendo los valores de cada ecuación sobre los coeficientes de a :

$$1.28326598 - a - 0.13444762 b = 0$$

$$2.47685877 - a - 0.250511086 b = 0$$

Despejando a en ambas ecuaciones:

$$a = 1.28326598 - 0.13444762 b$$

$$a = 2.47685877 - 0.250511086 b$$

Igualando los dos miembros:

$$1.28326598 - 0.13444762 b = 2.47685877 - 0.250511086 b$$

Efectuando operaciones:

$$0.250511086 b - 0.13444762 b = 2.47685877 - 1.28326598$$

$$0.116063466 b = 1.19359279$$

$$b = 1.19359279 / 0.116063466$$

$$b = 10.283966$$

Resultado sensiblemente igual al anterior.

Comprobación: Se ha demostrado que el punto establecido por los valores medios de nuestras variables queda sobre la línea de mejor ajuste, por lo que, dado un valor de d y obtenida una \hat{v} (calculada) el punto deberá quedar dentro de la citada línea.

Supongamos que la línea de la gráfica en la **Figura 103** es la de la ecuación de mejor ajuste, en la que el punto (\bar{x}, \bar{y}) está determinado por los valores medios

de nuestras variables. En esta situación, el punto (x, \hat{y}) obtenido con un valor dado de x y uno calculado de y debe pertenecer a la línea y se debe satisfacer que:

$$b = \frac{\hat{y} - \bar{y}}{x - \bar{x}} \text{ de donde } \hat{y} - \bar{y} = b(x - \bar{x})$$

De nuestro ejemplo vemos que para un diámetro de $d = 0.40 \text{ m}$ o $d^2 = 0.16 \text{ m}^2$ en nuestra ecuación:

$$\hat{v} = -0.09939149 + (10.28398635 * 0.16)$$

$$\hat{v} = 1.546046326$$

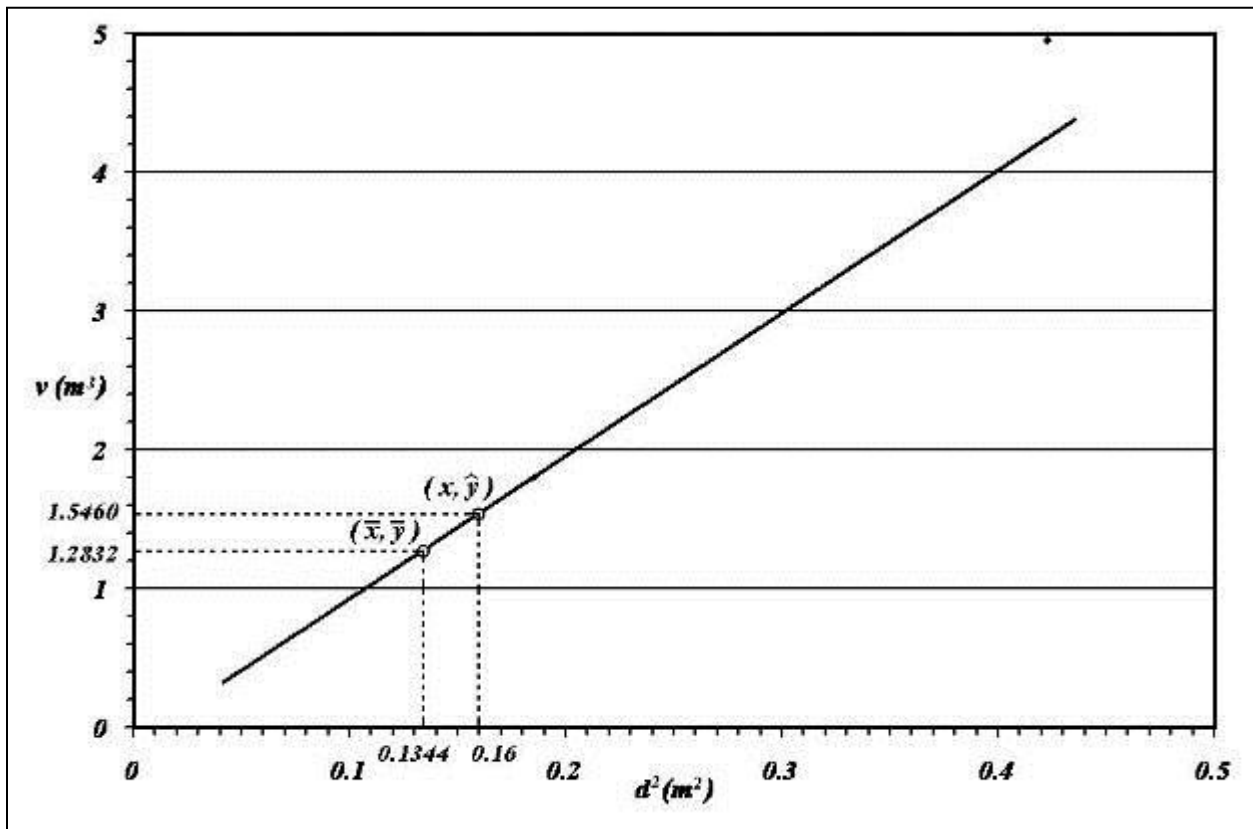


Figura 103. Comprobación del método de mínimos cuadrados para el ajuste de datos a modelos matemáticos lineales.

En nuestra expresión $\hat{Y} - \bar{Y} = b(X - \bar{X})$

$$1.599734 - 2.069571 = 11.478776 * (0.16 - 0.200931)$$

$$-0.469837 = -0.469837$$

Con lo que queda demostrado que un valor de la variable dependiente, obtenido a partir de un valor de la variable independiente, en la ecuación obtenida mediante el método de mínimos cuadrados, se encuentra en la línea generada con dicha ecuación.

Cuando la ecuación que relaciona el volumen de un árbol en función de su diámetro normal toma la forma del modelo $\hat{v} = a d^b$ que es un modelo potencial, éste puede linearizarse a través de la utilización de logaritmos y ajustarse por el método de mínimos cuadrados, como se efectuó en el caso anterior.

$$\log \hat{v} = \log a + b \log d$$

Si operamos de la misma manera que con el modelo anterior, tendríamos finalmente:

$$\log a = \overline{\log v} - b \overline{\log d}$$

$$b = \frac{\sum \log d * \log v - n \overline{\log d} \overline{\log v}}{\sum (\log d)^2 - n (\overline{\log d})^2}$$

5.3.2 Construcción de Tablas de Volúmenes.

Si calculamos el volumen de los árboles por medio de una curva diámetro y volumen encontraremos que, generalmente, el cálculo del volumen de cada árbol no se ajusta al volumen real. Esto se debe a que el volumen de los árboles no sólo se relaciona con el diámetro sino también con otros factores.

En la construcción de tablas de volúmenes o tablas de doble entrada generalmente se relacionan tres variables, una dependiente que es el volumen y dos independientes que generalmente son el diámetro normal y la altura, aunque en otras se incluye también un índice o factor de forma.

$$v = f(d, h) \text{ o } v = f(d, h, f)$$

En la construcción de tarifas de volúmenes utilizando el método de ajuste de mínimos cuadrados se plantean ejemplos de “regresión lineal simple”, porque se

recurre a una sola variable independiente. El problema se complica cuando se trata de regresiones múltiples, es decir, cuando intervienen dos o más variables independientes. Según se mencionó previamente, la secuencia de trabajo es la misma; el razonamiento no cambia. La dificultad estriba en que las operaciones de cálculo se multiplican progresivamente, en tal forma que si la ecuación tiene más de tres variables, el tiempo involucrado en la solución es muy grande si las operaciones se realizan en calculadoras convencionales de escritorio. En la misma forma, las posibilidades de cometer errores se incrementan notablemente. En estos casos el empleo del cómputo electrónico se hace prácticamente indispensable.

Las ecuaciones normales, en el caso de una ecuación de regresión lineal múltiple con dos variables independientes, de acuerdo con el modelo a continuación son:

Modelo: $\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + E$

Ecuación: $\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$

Ecuaciones normales:

$$\sum Y = n b_0 + b_1 \sum X_1 + b_2 \sum X_2$$

$$\sum X_1 Y = b_0 \sum X_1 + b_1 \sum X_1^2 + b_2 \sum X_1 X_2$$

$$\sum X_2 Y = b_0 \sum X_2 + b_1 \sum X_1 X_2 + b_2 \sum X_2^2$$

El técnico forestal actual no debe atemorizarse por la complejidad y laboriosidad que resulta de los cálculos cuando se trabaja con regresiones múltiples, pues si bien estas operaciones son en extremo lentas y pesadas cuando se hacen en gabinete, hoy en día resulta difícil encontrar un centro de cómputo electrónico o microcomputadoras en donde no existan programas o rutinas de cómputo para calcular regresiones múltiples. Así mismo, se hace la advertencia de que en ocasiones se emplean diferentes símbolos para el mismo concepto, como ha sido el caso en este libro, ya que se ha empleado el símbolo b_0 para identificar el mismo concepto que en ocasiones se ha referido como a .

5.3.2.1 Elección de modelos.

La ejemplificación anterior sobre la forma de lograr un ajuste a base de mínimos cuadrados se presentó suponiendo que ya se cuenta con el modelo

estadístico que mejor se ajusta a los valores muestrales. Se pasó por alto, en ese momento, la fase de “elección de modelos” que es, en sí, una de las más importantes en este tipo de trabajos.

La técnica de mínimos cuadrados garantiza que la recta o curva calculada sea la que mejor se ajusta a los datos de entre toda la familia de rectas o curvas que pueden derivarse del modelo seleccionado, pero no garantiza que el modelo escogido sea el más apropiado a los datos. Ésta es una consideración muy importante que la mayor parte de los técnicos forestales pasa por alto continuamente.

Para ejemplificar y ajustar a un conjunto de datos puede escogerse un modelo de regresión lineal; esto considerando que la disposición de los valores muestrales es el de una línea recta. A través de la técnica de mínimos cuadrados se puede determinar cuál de todas las rectas posibles se acopla mejor a los datos. Sin embargo, esto no evita que pueda haber una curva que se ajuste mejor a ellos que la propia recta estimada.

Para llegar a determinar la curva que resulta “óptima” desde un punto de vista estricto, sería preciso probar *todos los modelos estadísticos posibles*, tarea que resulta impráctica. Por fortuna, como resultado de la experiencia de un gran número de investigadores en México y en otros países, se ha llegado a concluir cuáles son las ecuaciones más importantes que se “apegan” en mayor grado a la forma de la dispersión de los volúmenes de árboles forestales. A continuación se procederá a discutir brevemente los tipos de modelos más comunes conforme a las investigaciones que al respecto existen en la literatura mundial.

a) Modelos aritméticos.

Los modelos aritméticos son aquellos donde no intervienen logaritmos ni expresiones matemáticas complejas, como es la elevación de una variable a una constante fraccionaria. Los exponentes que se utilizan en este tipo de expresiones son los dígitos 1 y 2, aunque esto no excluye la utilización de otros números enteros. Es común separar aquellos modelos aritméticos que emplean alguna medida de la forma de los árboles (*f*).

De acuerdo con lo anterior, se pueden resumir los modelos más importantes en la forma siguiente (Husch, 1963):

SIN CONSIDERAR EVALUACIONES DE LA FORMA.

Autor nombre del modelo	Modelo
Del coeficiente mórfico constante	$v = b_0 d^2 h$
De la variable combinada	$v = b_0 + b_1 d^2 h$
Australiana	$v = b_0 + b_1 d^2 + b_2 h + b_3 d^2 h$
Meyer modificada	$v = b_0 + b_1 d + b_2 dh + b_3 d^2 h$
Comprensible	$v = b_0 + b_1 d + b_2 dh + b_3 d^2 + b_4 h + b_5 d^2 h$
De Naslund	$v = b_0 + b_1 d^2 + b_2 d^2 h + b_3 h^2 + b_4 dh^2$
De Takata	$v = d^2 h / (b_0 + b_1 d)$
CONSIDERANDO EVALUACIONES DE LA FORMA.	
Abreviada	$v = b_0 + b_1 f d^2 h$
De la variable combinada	$v = b_0 + b_1 f + b_2 d^2 h + b_3 f d^2 h$

Donde: v = Volumen (m^3), d = Diámetro normal en (m), h = Altura total (m), f = Evaluación de la forma del árbol a través de la “razón de forma” o de la clase de forma de Girard, b_i = Parámetros a estimar.

b) Modelos logarítmicos.

Dentro de esta categoría se incluyen aquellos modelos cuyo carácter exponencial permite expresarlos y resolverlos linearizándolos por medio del empleo de logaritmos. Al igual que se hizo previamente con los modelos aritméticos, los modelos logarítmicos pueden separarse en dos grupos, según empleen o no evaluaciones de la forma de los árboles.

SIN CONSIDERAR EVALUACIONES DE LA FORMA

Autor o nombre del modelo	Versión no lineal	Modelo Versión linearizada
De Schumacher	$v = b_0 d^{b_1} h^{b_2}$	$\log v = \log b_0 + b_1 \log d + b_2 \log h$
De Korsun	$v = b_0 (d + 1)^{b_1} h^{b_2}$	$\log v = \log b_0 + b_1 \log (d + 1) + b_2 \log h$
De Dwight	$v = b_0 d^{b_1} h^{(3-b_2)}$	$\log v = \log b_0 + b_1 \log d + (3 - b_2) \log h$
De la variable combinada	$v = b_0 (d^2 h)^{b_1}$	$\log v = \log b_0 + b_1 \log (d^2 h)$
De Thornber	$v = b_0 (h/d)^{b_1} (d^2 h)$	$\log v = \log b_0 + b_1 \log (h/d) + \log d^2 h$

SIN CONSIDERAR EVALUACIONES DE LA FORMA

Autor o nombre del modelo	Modelo
	Versión no lineal
	Versión linearizada

CONSIDERANDO EVALUACIONES DE LA FORMA

Autor o nombre del modelo	Modelo	
	Versión no lineal	
	Versión linearizada	
De forma a través del diámetro	$v = b_0 d^{b_1} h^{b_2} d_h^{b_3}$	$\log v = \log b_0 + b_1 \log d + b_2 \log h + b_3 \log d_h$
De la variable combinada	$v = b_0 (f d^2 h)^{b_1}$	$\log v = \log b_0 + b_1 \log (f d^2 h)$

Donde: v = Volumen (m^3), d = Diámetro normal en (m), h = Altura total (m), d_h = Diámetro del árbol en un punto más alto que el d (m), f = Evaluación de la forma del árbol a través de la “razón de forma” o de la clase de forma de Girard, b_i = Parámetros a estimar.

Con la excepción de los modelos aritméticos del coeficiente mórfico constante, de la variable combinada y de la abreviada, así como de las dos ecuaciones logarítmicas de la variable combinada que se pueden resolver por medio del procedimiento de regresión lineal simple, el resto de ecuaciones requiere del empleo de técnicas de regresión lineal múltiple.

Existe un magnífico antecedente en la bibliografía forestal mexicana sobre el empleo del modelo de Schumacher ($v = b_0 d^{b_1} h^{b_2}$), linearizado mediante logaritmos ($\log v = \log b_0 + b_1 \log d + b_2 \log h$), Martínez Moreno (1937), reporta con sencillez y objetividad el procedimiento empleado para calcular las ecuaciones de regresión múltiple que le permitieron estimar el volumen en pie de tres especies de pino: *Pinus patula*, *Pinus hartweggi* y *Pinus ayacahuite*, a partir de mediciones de diámetro normal y altura, según el modelo citado. Las ecuaciones resultantes se consignan en la **Tabla 10**.

Tabla 10. Ejemplo de ecuaciones de regresión para la construcción de tablas de volúmenes.

Especie	Ecuación
<i>Pinus patula</i>	$v = -1.4192 * d^{1.8827} * h^{1.0421}$
	$v_u = -1.5101 * d^{1.8480} * h^{1.1698}$
<i>Pinus hartweggi</i>	$v = -1.3319 * d^{1.8821} * h^{0.9081}$
	$v_u = -1.4279 * d^{1.8163} * h^{1.0469}$

<i>Pinus ayacahuite</i>	$v = -1.3897 * d^{2.0049} * h^{0.7700}$
	$v_u = -1.4501 * d^{2.0006} * h^{0.7901}$

v : Volumen con corteza; v_u : volumen sin corteza.

Fuente: Martínez Moreno, J., 1937.

Para cada especie, la primera de las dos ecuaciones se refiere a volúmenes con corteza, en tanto que la segunda es aplicable a volúmenes sin corteza. Martínez Moreno concluyó en su estudio que para obtener mayor precisión en la estimación, es conveniente calcular una tabla de volúmenes por especie. Sin embargo, en su investigación observó que las diferencias por especie no fueron de importancia por lo que, considerando la simplificación que en trabajo involucra la estimación de una sola ecuación de regresión, recomienda la elaboración de una sola tabla de volúmenes “para bosques mezclados de estas tres especies cuando no se requiere la mayor exactitud posible”.

Como resultado de una serie de pruebas estadísticas que Martínez Moreno llevó a cabo para determinar si las diferencias que estimó en los coeficientes de regresión (b_0 y b_1) eran o no significativamente diferentes, encontró que de un total de doce comparaciones, solamente en cinco de ellas hubo diferencias significativas. De estas cinco diferencias significativas cuatro de ellas resultaron de la comparación de los coeficientes de regresión obtenidos para estimar los volúmenes sin corteza. La comparación de *Pinus patula* contra *Pinus ayacahuite* fue la que reportó el mayor número de diferencias significativas.

El trabajo en cuestión es especialmente valioso porque arroja importante información sobre las ventajas del empleo del modelo de Schumacher a las condiciones de los bosques de coníferas mexicanos. Un aspecto especialmente meritorio del estudio de Martínez Moreno es el hecho de que no obstante haberse efectuado en 1937 se apega a los “cánones” que en materia de pruebas de hipótesis se emplean cotidianamente en los reportes que hacen uso de las técnicas de regresión y correlación múltiple.

El modelo logarítmico de Schumacher lo empleó satisfactoriamente el organismo público descentralizado Productos Forestales Mexicanos para la elaboración de sus tablas de volúmenes.

Las experiencias existentes en Estados Unidos sobre el empleo del modelo de Schumacher no han sido tan favorables como sería de esperar. Pocos autores dudan que, efectivamente, el volumen de los árboles varía con un valor

ligeramente menor al cuadrado del diámetro, como se obtiene en el modelo de Schumacher, sin embargo, el pequeño aumento en precisión que se obtiene por este concepto se pierde, y aun más, da lugar a una mayor disminución de precisión que se origina por los errores involucrados en el manejo de logaritmos en vez de valores reales en la solución por mínimos cuadrados. Al considerar la utilidad de los modelos logarítmicos como alternativas de estimación en la elaboración de tablas de volúmenes, Spurr (1952) menciona: “Hablando en sentido amplio, los métodos logarítmicos muestran tendencia a ser menos precisos que las soluciones aritméticas y son, ciertamente, más molestos para resolverse por mínimos cuadrados. El modelo de Schumacher y la ecuación logarítmica de forma a través del diámetro son medios aceptables de estimar el volumen, pero no son de recomendarse en la generalidad”.

Por el interés que reviste, se presenta a continuación, un par de cuadros que señalan algunas de las ecuaciones que ha calculado el Inventario Nacional Forestal para la elaboración de algunas de las tablas de volúmenes que reporta en los informes de las entidades trabajadas (**Tablas 11 y 12**).

De estas tablas se puede inferir que los modelos empleados pertenecen a la categoría de “aritméticos sin evaluación de forma de arbolado”. Sin embargo, salvo por la ecuación aritmética de la variable combinada estimada para pino y encino de Jalisco y para las latifoliadas: chacá, amapola y tzalam de Quinta Roo, así como la ecuación aritmética “australiana”, que se calculó para los pinos de Durango, todos los modelos restantes son diferentes a los que se describieron en la clasificación anterior.

El empleo de modelos aritméticos siguiendo las técnicas de regresión múltiple por mínimos cuadrados, no ha sido un procedimiento privativo del Inventario Nacional Forestal en la elaboración de tablas de volúmenes. Varias unidades forestales del país han empleado con éxito la misma metodología, como San Rafael y Atenquique.

Lo anterior lleva a concluir que, el empleo de modelos aritméticos ha resultado de mucha utilidad para el tipo de arbolado forestal que existe en el país. Dentro de éstos, el empleo de la variable combinada ocupa un lugar relevante. Sin embargo, aún queda el campo abierto para la prueba de modelos que empleen algún índice de la forma de los árboles. Éste representa un material inexplorado en México dentro de las numerosas alternativas existentes para la elaboración de tablas de volúmenes aunque no parece muy práctico.

La experiencia acumulada a la fecha, en el extranjero y en el país favorece en forma muy especial el empleo del modelo aritmético de la variable combinada sin índice de forma. Myers (1964), la empleó con éxito para la elaboración de tablas de volúmenes de fuste total y comercial de *Pinus contorta* Dougl. para los estados de Colorado y Wyoming, EUA. Dicho autor calculó dos ecuaciones para derivar cada tabla, por el hecho de que la relación entre la variable “ v ” y “ d^2h ” no podría expresarse por medio de una sola regresión lineal para toda la amplitud de los datos básicos. El valor del error estándar de la línea ajustada para las tablas en pies cúbicos resultó inferior en todos los casos al 10%.

El empleo del mismo modelo dio magníficos resultados en el caso en que se elaboró una tabla de volúmenes para chopos jóvenes en plantación, (*Populus deltoides* Barr), con diámetro normal máximo de 10 pulgadas (Mohn y Krinard, 1971).

Este modelo, además de proporcionar un ajuste muy eficiente, tiene a su favor la simplicidad que implica el trabajar con una ecuación de regresión lineal simple.

Tabla 11. Ecuaciones estimadas para la elaboración de tablas de volúmenes de fuste total con corteza del genero *Pinus* para ocho entidades federativas del país.

Entidad federativa	Ecuación estimada	Fuente bibliográfica
Baja California	$\hat{v} = 0.010 + 0.388 d^2 h - 1.369 d^3$	INF (1968)
Chihuahua y Sonora	$\hat{v} = 0.00018 - 3.39 d^2 + 4.48 d^3 + 0.09d h + 0.33d^2 h$	INF (1965)
Durango	$\hat{v} = .38 + 5.8 d^2 + 0.018 h + 0.21 d^2 h$	INF (1965)
Jalisco	$\hat{v} = 0.02289 + 0.3917 d^2 h$	INF (1970)
Nayarit	$\hat{v} = 0.054 + 0.500 d^2 h - 1.350 d^3 - 1.136 d^2$	INF (1968)
Sinaloa	$\hat{v} = 0.0187 + 0.699 d^2 + 0.385 d^2 h$	INF (1970)
Zacatecas	$\hat{v} = 0.00361 - 0.49008 d^2 + 0.49093 d^2 h$	INF (1972)

Tabla 12. Ecuaciones estimadas para la elaboración de tablas de volúmenes de fuste total con corteza de algunas especies de latifoliadas de tres entidades federativas del país.

Entidad federativa	Especie o grupo	Ecuación estimada	Fuente bibliográfica
Nayarit	Encino	$\hat{v} = 0.008 + 0.326 d^2 h + 1.439 d^2$	INF (1968)
Jalisco	Encino	$\hat{v} = 0.02289 + 0.39172 d^2 h$	INF (1970)
Quintana Roo	Caoba	$\hat{v} = 6.35497 d^2 + 0.04409 d h$	INF (1969)
Quintana Roo	Cedro	$\hat{v} = 5.59697 d^2 + 0.07368 d h$	INF (1969)
Quintana Roo	Zapote	$\hat{v} = 5.77889 d^2 + 0.03406 d h$	INF (1969)
Quintana Roo	Chacá	$\hat{v} = 0.03715 + 0.42045 d^2 h$	INF (1969)
Quintana Roo	Amapola	$\hat{v} = 0.02579 + 0.37583 d^2 h$	INF (1969)
Quintana Roo	Jobo	$\hat{v} = 0.04690 + 0.39511 d^2 h$	INF (1969)
Quintana Roo	Tzalam	$\hat{v} = 0.03807 + 0.36626 d^2 h$	INF (1969)

Caballero D. (1971) ha resumido en forma sencilla las operaciones aritméticas que se precisan en el cálculo de la ecuación de regresión por el procedimiento de mínimos cuadrados, así como una evaluación de la precisión para este modelo.

La generalización de las computadoras electrónicas en la actualidad, ha tenido una fuerte repercusión en las metodologías que se emplean para elaborar tablas de volúmenes, muy especialmente por cuanto se refiere a la elección de modelos. Los dasónomos de Canadá, en forma muy especial, han trabajado intensamente en la prueba de numerosos modelos que no se habían ensayado con anterioridad. Para citar un ejemplo entre muchos, Raymond (1967), empleó con éxito la expresión de la “curva de crecimiento de Gompertz” para construir una tabla local de volúmenes aplicable a una zona arbolada de Toronto, Canadá, el modelo en cuestión es:

$$Y = KC^{BX}$$

Donde:

Y = Volumen

X = Diámetro en el punto de corte del árbol

K = Valor de la asíntota superior

C y B = Constantes

Otros modelos han sido empleados por Honer (1967), en un esfuerzo por expresar la forma de los árboles en términos matemáticos con el fin de adaptarlos a los procedimientos existentes de cómputo. De este trabajo resultó un grupo de tablas de volúmenes aplicables a las especies forestales comerciales de las regiones central y este de Canadá.

5.3.2.2 Prueba de modelos.

Los elementos de juicio que permiten a un investigador escoger el mejor de un grupo de modelos estadísticos son los dos estimadores siguientes: la varianza del estimador, $S_{\hat{y}.x_1...x_n}^2$ (o su raíz cuadrada, el error estándar: $S_{\hat{y}.x_1...x_n}$) y el coeficiente de determinación múltiple (r^2).

Por lo general, los programas de cómputo electrónico en materia de regresión múltiple, poseen rutinas que se encargan de calcular para cada una de varias combinaciones de variables, los estimadores siguientes: coeficientes de regresión, desviaciones estándar de los coeficientes de regresión, valor calculado de t para evaluar la significación de los coeficientes de regresión, varianza de la estimada, coeficiente de determinación múltiple, y el cuadro general del análisis de varianza.

Los cálculos anteriores permiten comparar la bondad del ajuste de los diferentes modelos, a fin de escoger el mejor de ellos sobre la base del valor mínimo del error estándar y el valor máximo de ajuste.

Considerando la importancia que tiene la varianza del error y el coeficiente de determinación múltiple en la elección de modelos, a continuación se expone una breve explicación sobre su naturaleza, así como sobre sus características más relevantes.

a) La varianza del error (cuadrado medio residual).

La varianza del error es una medida de la variabilidad observada en la variable dependiente que carece de justificación, esto es, que no se debe a la variación de la(s) variable(s) independiente(s).

La estimación de la varianza del error se lleva a cabo como parte de los cálculos involucrados en el análisis de la varianza. Las rutinas empleadas para tal efecto son temas que caen fuera del objetivo de este trabajo, pero pueden ser consultados en los textos clásicos de métodos estadísticos, como Snedecor (1967); Steel y Torrie (1960); Dixon y Massey (1957); Huntsberger (1967), etcétera.

El problema de considerar a la varianza del error como un “medidor” del ajuste de regresión es el hecho de que este estimador está influido por las unidades en que se hagan las observaciones. Esto es, la varianza del error en “alturas de pinos comerciales” será siempre mayor que el mismo estimador, pero referido a

“alturas de árboles de navidad”, por las diferencias intrínsecas de los individuos en las dos diferentes etapas de desarrollo y no porque al ajuste pueda ser “mejor” o “peor” en un caso que en otro. En tal virtud, resulta práctico el empleo del coeficiente de determinación.

b) Coeficiente de determinación.

El coeficiente de determinación se define como “la proporción de una suma de cuadrados total, que es atribuible a otra fuente de variación, la variable independiente” (Steel, 1960). Evidentemente, a medida que el coeficiente de determinación es más alto (el límite superior es la unidad), el ajuste del modelo de regresión a los datos es mejor.

El coeficiente de determinación es el cuadrado del coeficiente de correlación.

En el caso de correlación lineal simple, el coeficiente de determinación (r^2) se puede calcular por medio de la fórmula:

$$r^2 = \frac{\sum(X - \bar{x})(Y - \bar{y})}{\sum(X - \bar{x})^2 * \sum(Y - \bar{y})^2}$$

Dicha fórmula puede expresarse también en la forma siguiente:

$$r^2 = \frac{\left(\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{n} \right)^2}{\left(\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n} \right) \left(\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n} \right)}$$

5.3.2.3 Cálculo de los valores de la tabla de volúmenes.

Mediante la prueba de modelos se está en condiciones de escoger la ecuación o las ecuaciones más adecuadas. El problema posterior, para construir la tabla de volúmenes, se reduce a sustituir valores de diámetro normal y alturas en dicha ecuación o ecuaciones para encontrar los volúmenes que corresponden. El trabajo, en esta forma, es mera rutina. Si se dispone de facilidades de cómputo electrónico, el trabajo es sumamente sencillo (**Tabla 13**).

Tabla 13. Tabla de volúmenes de fuste total para *Pinus hartwegii* en la Estación Forestal Experimental Zoquiapan, estado de México.

Diám. Normal (cm)	A l t u r a (m)							
	10	15	20	25	30	35	40	45
15	0.114640	0.164496	0.212530	0.259253	0.304957	0.349831	0.394006	0.437580
20	0.201761	0.289504	0.374041	0.456271	0.536708	0.615684	0.693430	0.770116
25	0.312796	0.448827	0.579887	0.707371	0.832074	0.954512	1.075044	1.193934
30	0.447557	0.642195	0.829720	1.012126	1.190556	1.365744	1.538205	1.708316
35	0.605893	0.869390	1.123257	1.370195	1.611749	1.848915	2.082388	2.312681
40	0.787677	1.130228	1.460262	1.781287	2.095313	2.403635	2.707157	3.006542
45	0.992797	1.424553	1.840531	2.245156	2.640958	3.029570	3.412132	3.789482
50	1.221158	1.752226	2.263886	2.761582	3.248426	3.726426	4.196985	4.661131
55	1.472674	2.113124	2.730169	3.330373	3.917489	4.493941	5.061418	5.621163
60	1.747268	2.507136	3.239234	3.951352	4.647942	5.331879	6.005167	6.669282
65	2.044870	2.934161	3.790953	4.624361	5.439597	6.240025	7.027990	7.805219
70	2.365414	3.394107	4.385205	5.349255	6.292283	7.218182	8.129665	9.028729
75	2.708842	3.886887	5.021880	6.125897	7.205842	8.266169	9.309987	10.339584
80	3.075097	4.412424	5.700876	6.954164	8.180125	9.383817	10.568767	11.737573
85	3.464129	4.970641	6.422096	7.833939	9.214996	10.570967	11.905827	13.222498
90	3.875889	5.561471	7.185452	8.765112	10.310327	11.827474	13.321000	14.794176
95	4.310332	6.184848	7.990858	9.747580	11.465996	13.153198	14.814131	16.452433
100	4.767414	6.840710	8.838236	10.781246	12.681888	14.548007	16.385071	18.197104
105	5.247095	7.528999	9.727509	11.866018	13.957897	16.011778	18.033681	20.028035
110	5.749336	8.249660	10.658606	13.001809	15.293918	17.544393	19.759828	21.945078
115	6.274100	9.002639	11.631459	14.188536	16.689855	19.145739	21.563386	23.948092
120	6.821354	9.787886	12.646004	15.426119	18.145614	20.815710	23.444234	26.036944
125	7.391062	10.605354	13.702177	16.714483	19.661105	22.554203	25.402257	28.211506
130	7.983192	11.454996	14.799919	18.053554	21.236244	24.361121	27.437345	30.471656
Modelo: $v = b_0 d^{b_1} h^{b_2}$	Modelo linealizado: $\log v = \log b_0 + b_1 \log d + b_2 \log h$							
Ecuación: $v = 0.0000720805 * d^{1.96495683} * h^{0.8905516}$								

5.3.2.4 Utilización de índices de forma en la construcción de tablas de volúmenes.

Un grupo de árboles con los mismos valores de diámetro normal y de altura, es improbable que tengan exactamente los mismos volúmenes. La causa de la discrepancia es “la forma” de los sujetos.

La forma de los árboles es la resultante de un complejo de factores, debido por un lado a los mecanismos de la herencia, al medio ambiente (suelo, topografía, plagas, enfermedades, vientos predominantes, espesura, competencia, etcétera) y la interacción que se produce entre los dos anteriores.

Desde principios de siglo XX se hicieron varios intentos, inicialmente en Europa (especialmente en Suecia) y después en Norteamérica, por expresar la forma de los árboles a través de índices numéricos, en tal forma de derivar tablas volumétricas con esos conocimientos. Varios de los índices propuestos “desaparecieron” por no haber resultado suficientemente consistentes, pero otros se difundieron ampliamente demostrando su utilidad; en la actualidad se emplean satisfactoriamente en varios países. Por la importancia que revisten, vale la pena hacer una breve alusión a los más importantes.

Existe un reconocimiento general en el sentido de que en un árbol “normal” están presentes cuatro formas que se asemejan a otros tantos cuerpos geométricos conocidos como tipos dendrométricos (truncado de neiloide, cilindro, truncados de paraboloides y cono). El problema, en la práctica, y la causa de tanta irregularidad en los volúmenes, se debe al hecho de que la porción o longitud del fuste que se apega a cada uno de los cuerpos geométricos “prototipo”, rara vez es igual en dos árboles.

A continuación se procede a señalar los “intentos” más importantes que se han hecho para calificar la forma de los árboles a través de números para efectos de utilizarlos en la elaboración de tablas de volúmenes. Cabe agrupar estos esfuerzos en cuatro categorías.

5.3.2.4.1 Empleo de coeficientes mórficos.

El uso de coeficientes mórficos constituyó una de las primeras alternativas que se emplearon en la elaboración de tablas de volúmenes. El principio sobre el cual se apoya su utilización es simple:




Relacionar los volúmenes de los árboles con un volumen “tipo”, entendiéndose por éste el de un sólido geométrico conocido.

Emplear la relación anterior para obtener un factor de corrección (coeficiente mórfico). Éste, multiplicado por el volumen tipo que se obtiene con las mediciones del árbol, permite estimar el volumen real de dicho árbol.

Coeficiente mórfico (**CM**), es el cociente que existe entre el volumen de un árbol y el de un cuerpo geométrico del mismo diámetro que el diámetro normal del árbol y de su misma altura.

$$CM = \frac{\text{Volumen real de un árbol}}{\text{Volumen de un cuerpo geométrico}}$$

El tipo de cuerpo geométrico empleado en la relación anterior sirvió de base para el establecimiento de un criterio de clasificación de coeficientes mórficos. De acuerdo con esto Belyea (1931), describe tres tipos de coeficientes mórficos:

-  Coeficientes mórficos cilíndricos.
-  Coeficientes mórficos cónicos.
-  Coeficientes mórficos basados en truncados.

Beleyea (1931), señala que los dos primeros se adaptan mejor a la estimación de volumen cúbico (m^3 y *pies*³) en tanto que el tercero es más adaptable a la obtención de volumen en pies-tabla.

Otro criterio de clasificación tiene que ver con la altura del árbol que se emplea para medir el diámetro que se utilizará en los cálculos. Sobre el particular, Belyea describe la clasificación siguiente:

Coeficientes mórficos a la altura del diámetro normal. En el caso en que la medición del diámetro para el cálculo del área del árbol y del cuerpo geométrico “tipo” se hace a 1.30 m sobre el nivel medio del suelo.

Coeficientes mórficos absolutos. Cuando el diámetro se mide en la base del árbol.

Coeficientes mórficos normales. Cuando el diámetro se toma a una posición relativa (por ejemplo 1/10, 1/20, etcétera) de la altura del árbol y fija con respecto al nivel del suelo.

Con respecto a la porción del árbol que se emplee, los coeficientes mórficos pueden ser “comerciales”, “de fuste total” o de “árbol total”, según se recurra a la altura comercial, a la altura de todo el fuste o se incluya el volumen total del árbol (tocón, punta del árbol y ramaje), respectivamente.

Desde el punto de vista de aplicación práctica, los coeficientes mórficos que se han empleado con mayor frecuencia son los cilíndricos a la altura del diámetro

normal, de fuste total. La elaboración de tablas de volúmenes, recurriendo al cálculo de coeficientes mórficos es una metodología que estaba prácticamente ausente del medio forestal nacional aunque estudios realizados han venido a demostrar que esta metodología, con algunas variantes, puede emplearse ventajosamente (Caballero D., 1970; Musálem, 1970; Evert, 1969).

En una investigación llevada a cabo por Caballero (1970), se hizo un análisis estadístico en cuanto a las características y al comportamiento de los coeficientes cilíndricos a la altura del diámetro normal, considerando alturas totales en arbolado de cedro rojo. La base del método consiste en reducir hasta donde es posible, la variabilidad de los coeficientes mórficos por medio de la agrupación de los sujetos de la muestra en categorías por altura. Los resultados obtenidos fueron muy alentadores. El ajuste de las curvas obtenidas por coeficientes mórficos, a los datos muestrales resultó muy eficiente. Por otro lado, las evaluaciones de variabilidad de los coeficientes mórficos demostraron que el agrupamiento por categorías de altura, como criterio de homogeneización lleva a obtener buenos resultados. El método, en estas condiciones, planteó una perspectiva atractiva para la elaboración de tablas de volúmenes en el país, por su sencillez (muy pocos cálculos involucrados) y su alta precisión.

Musálem (1970), siguiendo la metodología propuesta por Caballero, en el trabajo anterior, probó la bondad del empleo de coeficientes mórficos con un material biológico diferente al del trabajo original (pinos del grupo ponderosa). Sus resultados reafirmaron la bondad de la metodología expuesta. Este estudio, aún más ambicioso que el anterior, estudió el comportamiento de coeficientes mórficos con agrupamientos basados tanto en categorías de alturas como en categorías diamétricas. El análisis final llevó a concluir que, para pinos del grupo ponderosa, resulta más eficiente agrupar los datos en categorías de alturas de cinco en cinco metros.

El método propuesto por Caballero y después ratificado por Musálem para elaborar tablas de volúmenes utilizando coeficientes mórficos, se puede resumir en los puntos siguientes:

1. Una vez que se han calculado los volúmenes de los árboles de la muestra, separar los valores por categorías de alturas. Caballero sugiere agrupaciones de cuatro en cuatro metros para cedro rojo; Musálem las recomienda de cinco en cinco metros para pinos del grupo ponderosa.

2. Calcular, a cada árbol de la muestra, el volumen del cilindro correspondiente, considerando que el área de la sección transversal y la altura de dicho cilindro son las del árbol, a la altura de 1.30 m y la altura total, respectivamente.

3. Tomando como criterio para el cálculo de los coeficientes mórficos, lo que en la ciencia del muestreo estadístico se conoce como “estimada de razón de medidas”, para una misma categoría diamétrica, sumar los volúmenes reales de todos los árboles de la muestra y dividir el valor resultante entre la suma de los volúmenes de los cilindros correspondientes. En esta forma se obtiene el coeficiente mórfico estimado de la categoría de altura de que se trata. El mismo procedimiento se aplica al cálculo de los coeficientes mórficos de las clases altimétricas restantes.

4. Con el conocimiento del coeficiente mórfico de cada categoría de altura, el volumen de un árbol cualquiera, puede calcularse, entonces, multiplicando el valor del coeficiente mórfico por el volumen del cilindro correspondiente a la categoría de altura dentro de la cual resultase incluido el árbol considerado.

5.3.2.4.2 Empleo de razones de forma.

Una de las alternativas que, con relación a la evaluación de la forma de los árboles, se ha empleado con mayor éxito es la “razón de forma” (*form quotient*).

La Sociedad de Forestales Americanos, define a la razón de forma como el “cociente que resulta de dividir el valor del diámetro de un árbol, medido a cualquier altura, por arriba del diámetro normal, entre el valor del propio diámetro normal” (Belyea, 1931).

La altura a la que se toma el primer diámetro define el tipo de razón de forma de que se trata. Uno de los criterios más frecuentes ha sido el de considerar la mitad de la altura del árbol. En este sentido se han concebido dos tipos de razones de forma. El primero de ellos, la “razón de forma normal”, o “razón de forma de Schiffel”, se elaboró considerando la medición del diámetro superior a la mitad de la altura del árbol. Sin embargo, un profesor sueco, Tor Jonson advirtió el hecho de que la razón de forma normal es inconsistente debido a que la consideración de la altura total del árbol lleva a medir el diámetro superior más cerca del diámetro normal a medida que los sujetos son más bajos. El propio Jonson sugirió, en estas condiciones, que resulta más ventajoso medir el diámetro

superior a la mitad de la altura que existe entre el diámetro normal y la yema terminal. En esta forma se concibió la segunda razón de forma, a la que se ha denominado “razón de forma absoluta de Jonson”.

$$R_{fa} = \frac{d_{0.5(h-1.3)}}{d}$$

Donde:

R_{fa} = Razón de la forma absoluta.

$d_{0.5(h-1,3)}$ = Diámetro a la mitad de la altura entre el punto del diámetro normal y la yema terminal.

d = Diámetro normal.

Las experiencias de Jonson fueron cuidadosamente evaluadas después, en Europa, por L. Mattson-Marn del Instituto Sueco de Dasonomía Experimental, empleando mediciones de árboles de alerce. Él concluyó que las discrepancias observadas entre la disminución gradual del diámetro a lo largo del fuste de alerce y de las especies trabajadas por Jonson fueron mínimas.

Cloughton-Wallin y McVicker (1920) se encargaron de estudiar la utilidad de la razón de forma absoluta en las coníferas de los bosques de Canadá.

Otra razón de forma frecuentemente empleada en Estados Unidos es la de “Girard”. Ésta es el cociente que resulta de dividir el valor del diámetro sin corteza que corresponde a la parte superior de la primera troza de 16 pies (4.88 m), entre el valor del diámetro normal con corteza. Cuando la medición se hace sobre arbolado en pie, que es lo más común, entonces la altura del diámetro superior se hace considerando, además de los 16 pies de la troza, la altura del tocón (1 pie) y la tolerancia por concepto de asierre (0.3 pies). En estas condiciones, el diámetro superior se hace a 17.3 pies (5.27 m).

Al igual que se hace cuando se calculan tablas de volúmenes con otras razones de forma, las que se elaboran con el empleo de la razón de forma de Girard también se separan en intervalos, creando así clases de forma. Este tipo de tablas son generalmente “compuestas”, es decir, que en la muestra intervienen lo mismo latifoliadas como coníferas, y la aplicación se extiende a ambos grupos, siempre y cuando tengan la misma forma como común denominador, esto es, que pertenezcan a la misma “clase de forma de Girard”.

La mayor parte de las tablas de volúmenes que presenta el *Manual forestal* que elaboró la Sociedad Forestal Americana para su aplicación a Norteamérica, están basadas en clases de forma, la mayoría de Girard.

5.3.2.4.3 Empleo de razones de puntos de forma.

A principios de siglo XX el profesor Jonson (1912), presentó una teoría en el sentido de que la forma de un árbol es el resultando, mayormente, del efecto mecánico del viento sobre el propio árbol. El centro de gravedad de la copa coincidiría, entonces, con el punto de máxima resistencia al viento, que se denominó “punto de forma”

La “razón del punto de forma” se definió como el cociente resultante de dividir la altura del punto de forma entre la altura total del árbol.

$$R_{pf} = \frac{h_{pf}}{h}$$

El valor anterior, expresado en porcentaje se conoce también como “clase de forma”.

La estimación propuesta por Jonson, si bien, fue motivo de análisis y de polémica en su época, hoy en día tiene escasa utilización. Quizá su desventaja más notable fue la dificultad de definir claramente el centro de gravedad de los árboles. La estimación de este punto se hacía a ojo, lo cual resultaba subjetivo y consecuentemente sujeto a errores de consideración.

5.3.2.4.4 Empleo de tablas basadas en la disminución gradual del diámetro a lo largo de la longitud del fuste.

Desde hace varios años, algunos investigadores han sostenido que la única forma válida de evaluar la forma de los árboles, es a través de mediciones diamétricas múltiples, dispuestas en intervalos a lo largo del fuste, desde la base hasta la yema terminal.

En Estados Unidos ha sido muy común el llevar a cabo este tipo de mediciones sobre arbolado forestal para obtener “tablas con valores medios de disminución diamétrica a lo largo del fuste” (*taper tables*). Este tipo de tablas sirve, posteriormente, para la construcción de tablas de volúmenes, las que a su vez

son aplicables exclusivamente, a arbolado cuya forma coincide con los valores medios obtenidos de aquél que empleó para la construcción de dichas tablas.

6 Inventarios Forestales.

6.1 Definición de un Inventario Forestal.

Los inventarios forestales suelen considerarse como sinónimos de estimaciones de la cantidad y calidad de la madera de un bosque, aunque también es conveniente pensar en otros factores, ya que cualquier estimación de las cantidades de madera de un bosque tiene poco significado si no se considera en relación con la zona donde los árboles se encuentran. Un bosque no es simplemente una acumulación de madera, sino una asociación de organismos vivos que puede y debe tratarse como una riqueza renovable.

Desde el punto de vista del cálculo de la cantidad de madera, un inventario forestal completo debe incluir una descripción de la zona forestal y de su régimen de propiedad, así como cálculos de volumen de los árboles (o de otros parámetros), del incremento y de la merma.

Según el objetivo del inventario podrán eliminarse o incluirse uno o más de estos elementos; sin embargo, para una completa evaluación de una zona forestal, y en especial para su aprovechamiento con miras a un rendimiento sostenible deberá, evidentemente, que conocerlos todos. Esto lo podemos observar cuando las zonas forestales son importantes también para funciones recreativas, la explotación de cuencas hidrográficas y de la vida silvestre o de su posible conservación a otros usos, etcétera

A veces sólo serán objeto del inventario las cantidades y calidades de la madera; en otros casos habrá que obtener, además, datos relacionados con otros recursos y, con creciente frecuencia, sólo interesarán estos últimos y se precisará su valoración, observaciones y medidas diferentes o adicionales.

Gran parte de esta información suele obtenerse muchas veces de los inventarios de la madera, que servirán entonces para estimar otros valores asociados a los forestales, por ejemplo la composición forestal y la información topográfica son también esenciales cuando se trata de apreciar las posibilidades recreativas o las relacionadas con las cuencas hidrográficas.

Dadas las anteriores bases, para poder pensar en una definición específica de inventario forestal, a continuación se enumeran algunas de las definiciones que reportan autores relacionados con el tema.

Inventario forestal. Trata de describir la cantidad y calidad de los árboles de un bosque y muchas de las características de la zona de terreno donde crecen tales árboles.

Otros autores dicen que “inventario forestal” significa enumeración y, aún más, enumeración con fines de evaluación.

En Dasometría, inventario forestal significa la determinación de alguna característica de los recursos forestales de un lugar en forma más o menos precisa. Las características que se determinan con más frecuencia son: el volumen, el área basal, la altura media, el número de árboles y a veces se incluye alguna medida de la regeneración, etcétera.

Una definición más de inventario forestal dice: “es la cuantificación ordenada de superficies clasificadas, de los volúmenes contenidos y el crecimiento probable referidas a especies, divisiones naturales y convencionales adoptadas”.

En esta breve guía, el estudio se concentrará principalmente sobre los inventarios relativos a la madera. Para la planificación de los inventarios forestales que exigen datos de otro tipo es esencial el concurso de los especialistas en las respectivas materias asociadas.

6.2 Objetivos de un Inventario Forestal.

Es muy importante definir con claridad los distintos objetivos del inventario propuesto. Debe considerarse la importancia relativa de cada uno de ellos, para poder llevar a cabo las operaciones que mejor resuelvan el problema. También hay que tener en cuenta las inevitables restricciones y limitaciones, tales como el tiempo, fondos disponibles y la aptitud del personal.

A menudo se critica a los responsables del diseño y ejecución de las operaciones de inventario de abordar estos trabajos sin idea clara de los objetivos a cumplir y, en consecuencia, la información conseguida puede ser inadecuada, cuando no inútil, para los funcionarios forestales, economistas, madereros e industriales.

6.2.1 Definición de Objetivos.

Los objetivos deberán definirse conjuntamente por el personal que ha de utilizar los resultados, esto es, responsables de decisiones, gestores forestales, y por el especialista en inventarios, no sólo por éste. El especialista debe diseñar un

inventario que facilite a los usuarios la información que necesiten en forma adecuada y con la precisión requerida. Esta cooperación con los posibles usuarios es necesaria desde el momento en que se prepara el inventario hasta la salida de los últimos resultados.

6.2.2 Prioridad de Objetivos.

La prioridad de objetivos a cumplir debe establecerse con claridad antes del diseño de un inventario. Por ejemplo, si la estimación de la superficie de un bosque es más importante que la de su volumen, el diseño reforzará los trabajos de fotointerpretación y de dibujo de mapas, dando menor importancia a las medidas de árboles sobre fotografías o en el terreno. Asimismo, se establecerán prioridades en las zonas o bloques de la región inventariada. Respecto a la estimación de volúmenes, las especies no tienen el mismo valor económico, por lo que el inventario será diseñado para conseguir, con una predeterminada precisión, los resultados correspondientes a las especies más valiosas; los volúmenes de cada una de las especies secundarias pueden estimarse con menor precisión, sobre todo si forma masas de muy baja densidad y están desigualmente distribuidas.

6.2.3 Especificaciones más Importantes para los Objetivos de un Inventario Forestal.

6.2.3.1 Límites y cabida exacta del área por inventariar.

La existencia de buenos y recientes mapas topográficos y de uso de la tierra y/o imágenes de sensores remotos facilitarán las decisiones sobre este punto.

6.2.3.2 División del área a inventariar.

Cuestión importante, ya que la intensidad del inventario depende del tamaño de las últimas subdivisiones del bosque para los que se solicitan resultados con una determinada precisión (no se incluyen en esta división las estratificaciones realizadas para mejorar la precisión de los resultados de cualquier unidad inventarial), esta división o clasificación del área a inventariar puede hacerse por los siguientes factores:

Basada en índices bioclimáticos, como por ejemplo una clasificación de los terrenos por su capacidad productora.

En relación con los actuales usos de la tierra y su vegetación.

En relación a los criterios de ordenación o manejo del monte, tales como:

- a) Propiedad y dependencia.
- b) Administración.
- c) Fisiografía y accesibilidad.
- d) Protección (cuencas hidrográficas).
- e) Tramos de corta, etcétera.
- f) Combinación de dos o más clasificaciones anteriores.

6.2.3.3 Naturaleza de la información requerida.

Ésta puede ser gráfica (planos, mosaicos, gráficas y mapas, etcétera) descriptiva (descripción cualitativa, por ejemplo de los tipos de bosques) o cuantitativa.

6.2.3.4 Presentación de la información solicitada.

Conocido el tipo de información a proporcionar, así como la precisión deseada, puede decidirse el método de presentación eventual de los resultados. El formato de tablas finales, por ejemplo será diseñado y mostrado a los usuarios para obtener su aprobación. Ya que la claridad y la reducción del “tiempo de acceso” a los resultados son dos cualidades importantes del informe o memoria de un inventario.

6.2.3.5 Precisión de la información requerida.

La precisión de los resultados correspondientes a los parámetros más importantes debe ser determinada antes del inventario. Para algunos otros parámetros, la precisión requerida puede no ser determinada con exactitud, pero no debe exceder de un cierto orden de magnitud. Con respecto a la precisión se tratará más profundamente en el apartado respectivo.

6.3 Importancia Relativa de los Elementos de un Inventario Forestal.

Es difícil, si no imposible, enumerar las muchas razones que justifican un inventario. No existe una serie de modelos de inventarios diferentes, destinados a propósitos exclusivos, sino un modelo único flexible, en el que los diversos elementos son puestos de relieve con intensidad variable.

Los inventarios de los aprovechamientos forestales privados, por ejemplo, exigirán una información más detallada sobre los volúmenes de las especies, la clasificación por tamaño, el emplazamiento preciso del rodal, y los medios de comunicación, que las que necesite una apreciación general de la superficie o del volumen forestal a escala nacional o regional. Es evidente que los inventarios que han de servir de base a decisiones relativas al aprovechamiento requerirán datos sobre el incremento y merma de los rodales mientras que los destinados simplemente a la preparación de un plan de corte de madera no necesitarán tales datos, pero en cambio, concederá mayor interés a la topografía, a los planes de extracción y a los sistemas de transporte que han de utilizarse al establecer un plan de aprovechamiento.

Con fines meramente ilustrativos, que bajo ningún aspecto deben considerarse completos, podría prepararse una lista de algunos tipos de inventarios e indicar la importancia que podría concederse a los diversos elementos. En la **Tabla 14** se indica la diferente importancia relativa de los tipos de inventario escogidos como ejemplos.

Las prioridades asignadas a los diversos elementos son de carácter subjetivo y, por consiguiente, discutibles, pero lo que importa, cuando se estudia ese cuadro, no es la exactitud de la prioridad asignada sino más bien la diferente importancia que se atribuye a los elementos que lo componen.

Un inventario forestal nacional exige la estimación general de todos los elementos que componen un inventario forestal, como se indica en la **Tabla 14**; en ella se registran el emplazamiento, la extensión, naturaleza, estado y capacidad productiva de los bosques de un país. Una vez completo, contendrá descripciones, cuadros y mapas de los bosques, tal como estaban en el momento de efectuar el inventario. Debe proporcionar los datos necesarios para la formulación de planes racionales de desarrollo y aprovechamiento de esos bosques, porque serán esenciales para la buena ordenación de los recursos forestales. En estos inventarios nacionales se deben también dar clasificaciones detalladas de las zonas forestales y cálculos de los volúmenes de la madera utilizable de grandes extensiones. Debe preverse el estudio del incremento y de la merma y, por lo general, aunque no siempre, suelen incluir la preparación de mapas forestales.

Tabla 14. Importancia Relativa de los Elementos de un Inventario Forestal.

Ejemplos de tipos característicos de inventarios	Cálculos de superficie	Descripción topográfica	Sistema de propiedad	Accesibilidad y medios de transporte	Cálculo de volúmenes o de otros parámetros	Cálculo de incremento	Cálculo de merma	Otros datos relativos al valor recreativo, a las cuencas hidrográficas, a la vida silvestre, otros posibles aprovechamientos de la tierra, etc.
Inventario Forestal Nacional	II	II	II	II	II	II	II	II
Para planes de trabajo	I	II	II	II	I	I	I	II
Para reconocimientos	II	III	III	II ó III	II ó III	III	III	II
Para explotaciones madereras	II	I	III	I	I	III	III	III
Para obtención de datos básicos para los estudios de viabilidad de las industrias forestales	II	II	I	I	I	I	I	II
Para la obtención de datos básicos para la evaluación de la madera en pie	I	II	III	I	I	III	III	III
Para el estudio del uso del terreno	I	I	I	I	III	III	III	I
Para el estudio del valor recreativo	II	II	I	I	III	III	III	I
Para el estudio de cuencas hidrográficas	I	I	II	II	II	II	II	I

Prioridades asignadas:

- I. Muy importante. Necesario con detalles o con arreglo a clases detalladas de rodales.
- II. Cálculo general.
- III. De poca importancia o que puede suprimirse.

Los inventarios para planes de trabajo deben dar, con detalle, la información necesaria para la preparación de planes de trabajo destinados al aprovechamiento, relativamente intenso, de zonas limitadas. Habrán de calcularse los volúmenes, por especies, de los diversos rodales del bosque y deben distinguirse las diferentes clases de lugares.

Son indispensables las estimaciones del incremento y de la merma así como los mapas forestales. Serán también necesarias las estimaciones detalladas de superficies y, por lo menos, información de carácter general sobre la topografía, el régimen de propiedad y los medios de transporte. En algunos países los inventarios para planes de trabajo se han integrado en el programa nacional de inventarios, mientras que en otros se han efectuado con completa independencia de aquél.

Los inventarios de reconocimiento tienen como objetivo facilitar tratos preliminares sobre el emplazamiento y extensión de las zonas forestales, con el menor costo posible. Pueden conocerse unas pocas clases forestales muy amplias y clasificarse también terrenos no forestales. No hay que calcular el volumen de la madera y la preparación de mapas expositivos. Este tipo de reconocimiento puede hacerse interpretando fotografías aéreas o imágenes de satélite con un mínimo de examen del terreno.

Los inventarios para aprovechamiento único sólo requieren datos para la preparación de un programa de cosecha de madera. Los principales datos son el volumen de la madera, frecuentemente por especies; el tamaño y la calidad; el emplazamiento y la accesibilidad. Lo más importante es saber la cantidad de madera existente, y por lo tanto hacen falta pocos o ningún dato sobre merma o incremento.

La información que los inventarios forestales proporcionan es sólo una parte de los datos fundamentales que requiere un estudio sobre la viabilidad de las industrias forestales. El inventario contendrá toda la información relativa al recurso forestal que habrá que evaluar después, junto con la información procedente de otras fuentes, sobre las condiciones del mercado, el emplazamiento de las fábricas, la energía necesaria, la disponibilidad de mano de obra, los medios de transporte y fábricas actuales o proyectadas. Como los estudios sobre la viabilidad industrial se hacen usualmente con miras a una industria permanente, habrá que evaluar con todo detalle la capacidad de los recursos forestales para asegurar un abastecimiento regular en materias primas; por esta razón deberán obtenerse con todo detalle los diversos elementos de un inventario, como se indica en la tabla anterior.

La información que proporcionan los inventarios para la evaluación de la madera en pie es parecida a la exigida para los planes de aprovechamiento de madera. Como el objetivo de la valoración es asignar un valor a la madera en pie, mientras que los planes de aprovechamiento afectan principalmente a la extracción, la importancia que haya que atribuirse a los elementos de los inventarios variará en los inventarios para planes de aprovechamiento se pondrán de relieve los aspectos relacionados con los planes y operaciones de corte, mientras que en los que tienen como objeto la evaluación de la madera en pie se subrayarán los elementos relativos al valor de la madera.

La información que necesitan los estudios sobre aprovechamiento del terreno, sobre su valor recreativo o sobre las cuencas hidrográficas se compone de casi todos los elementos habituales en los inventarios forestales cuya finalidad es la valoración de la madera, más cualquiera otra información que pueda requerirse. Recíprocamente, los inventarios de este tipo serán mucho más útiles si contienen datos sobre el reconocimiento y la medición, en cierto grado, de otros recursos forestales.

Los tipos de inventario expuestos anteriormente deben considerarse solamente como generales, ya que existirán ciertamente inventarios para otras muchas finalidades específicas. Cuando hay necesidad de otros tipos de inventarios convendrá conocer desde el primer momento la importancia relativa de sus elementos, porque éstos servirán de ayuda para los detalles posteriores, más específicos, de un esquema de inventario.

6.4 Zonas Forestales.

El punto esencial de todo programa de inventario forestal es determinar la superficie objeto del mismo. Es de primordial importancia definir lo que debe considerarse como terreno forestal o terreno no forestal y las diversas categorías afines. No es tarea fácil formular definiciones aceptables que comprendan todos los casos. La FAO, en su Inventario Forestal Mundial (1968), utilizó una serie de definiciones que son revisiones de otras anteriores y que probablemente serán revisadas de nuevo, a la luz de experiencias más recientes. La definición de terreno forestal de ese Inventario es la siguiente: “Todos los terrenos con una cubierta forestal, es decir, con árboles cuyas coronas cubran más del veinte por ciento de la superficie y que se destinen principalmente a usos forestales”.

En un inventario particular conviene dividir las categorías generales en una serie de clasificaciones más detalladas. Cualquiera que sea el sistema escogido habrá que calcular después las superficies.

6.5 Régimen de la Propiedad Forestal.

En algunos inventarios puede ser necesaria información sobre las diferentes modalidades de propiedad de una zona forestal, cuando el régimen de propiedad influya en el aprovechamiento o en el desarrollo de los bosques. Los métodos de administración de las grandes zonas forestales de propiedad pública suelen ser completamente diferentes de los que convienen a bosques aislados de poca extensión y propiedad privada. La cuestión del régimen de propiedad influirá también profundamente en los planes del desarrollo industrial futuro.

6.6 Cubicación y Otras Medidas de la Cantidad de Madera.

Esta fase del inventario se ocupa de las unidades en que se expresan las cantidades de materias primas aprovechables del bosque. Esta materia prima puede emplearse para aserrar, para chapas, pasta, combustible o cualquier otro de los usos a que pueden destinarse la celulosa o los demás productos forestales. Durante muchos años estas primeras materias se han expresado cuantitativamente en unidades de volumen, pero las unidades de peso también se vienen utilizando con creciente frecuencia para la producción forestal, especialmente cuando se trata de cantidades de madera destinadas a la fabricación de pasta y de papel.

La utilización de las unidades de volumen en un inventario o la importancia que debe atribuírsele, dependerá de la finalidad de aquel. Para las fases iniciales de investigación de los recursos forestales de las zonas subdesarrolladas, no habrá probablemente necesidad de calcular con detalle las cantidades de madera, o en todo caso, este cálculo será menos urgente que la determinación y clasificación de las zonas forestales; no obstante, deben hacerse estimaciones preliminares de las cantidades de madera o cálculos más detallados en fechas posteriores, cuando se consideren necesarios. Si estas estimaciones de las cantidades de madera se hacen más necesarias o más precisas, habrá que conceder mayor importancia a este elemento al planificar el inventario.

6.7 Incremento.

Cuando los datos de los inventarios forestales se utilicen para la preparación de planes de aprovechamiento forestal, la determinación del incremento actual o potencial pasará a ser uno de los elementos más importantes, pero se trata de una operación compleja y difícil. En ciertas condiciones podrán prepararse las estimaciones preliminares del incremento en un tiempo relativamente breve, sirviéndose de los procedimientos técnicos adecuados; pero en otras ocasiones será imposible hacer una estimación rápida, y habrá que dedicar a esa tarea mucho tiempo del planeado.

El cálculo de la merma de un bosque es importante para todo inventario que haya de proporcionar información para la planificación de aprovechamientos de rendimiento sostenido; si han de incluirse en el inventario, habrá que hacer planes para reunir los datos necesarios, como parte del inventario. Deben calcularse también las partes de la merma que corresponden a la recolección de madera, independientemente de las actividades del inventario, tomando como base los informes sobre el consumo de madera, proporcionados por las industrias madereras y por otros consumidores. En este caso, es un problema especialmente difícil calcular las cantidades de madera utilizadas separadamente, en particular por la población rural.

Para conocer la situación actual y futura de los recursos forestales hacen falta estimaciones satisfactorias de la merma, para compararlas con las estimaciones del incremento.

6.8 Periodicidad de los Inventarios.

Para darse cuenta de los cambios que se producen en un bosque durante un periodo de tiempo, o para evaluarlos, hacen falta inventarios periódicos o repetidos; si no se evalúan periódicamente las cantidades de madera del bosque pueden pasar inadvertidas las variaciones del incremento que pueden tener graves consecuencias al acumularse. La falta de estadísticas satisfactorias sobre tales cambios del incremento forestal dificulta seriamente el aprovechamiento continuo de todas las zonas forestales, ya sean privadas o públicas, de pequeña extensión o a escala nacional.

La actualización de los inventarios pondrá de manifiesto los cambios ocurridos durante los intervalos entre mediciones, en la composición, número, calidad, diámetro y distribución de los árboles según la altura, y las cantidades resultantes de madera con arreglo a esas características. Debe señalarse que todas ellas son expresiones del incremento, ya que éste refleja la variación de las características de los árboles y de los rodales con respecto al tiempo.

Esta actualización de los inventarios puede efectuarse por inventarios que se repiten independientemente, utilizando el sistema llamado de inventario forestal continuo predecesor del método de control, o bien métodos más recientes de muestreo repetido con sustitución parcial.

La repetición de inventarios independientes para la misma zona forestal permitirá obtener estimaciones brutas del incremento del rodal; por ejemplo, se podrá hacer un inventario de una zona forestal durante un año y repetirlo varios años después, sin necesidad de volver a medir las mismas unidades de muestreo, ni los mismos árboles. La diferencia entre los dos inventarios representa el cambio de volumen sobrevenido durante el periodo, cambio que puede considerarse como el incremento del rodal. Téngase presente que esta estimación del incremento no será de una gran exactitud porque incluye los errores de muestreo de ambos intervalos.

Los inventarios periódicos que utilizan el método de control eliminan los errores de muestreo debido al hecho de que se mide toda la superficie. En este método se hace en cada inventario una medida completa de la zona forestal; como toda la zona está marcada, al estimar el incremento no se producirán variaciones del muestreo debido a la selección aleatoria de los árboles. Por supuesto, este método es más bien aplicable a zonas forestales reducidas, de intenso aprovechamiento. En las zonas forestales más extensas puede utilizarse el sistema de inventario forestal continuo, que emplea parcelas-muestra representativas en vez de una marcación completa de todo el bosque. Las mediciones repetidas de los mismos árboles en las mismas parcelas darán estimaciones del incremento más precisas que las parcelas temporales de los inventarios independientes repetidos. Las variaciones que se deban a las diferencias en las muestras escogidas se eliminan utilizando la misma unidad de muestreo en cada medición. El perfeccionamiento en la aplicación del inventario forestal continuo, del muestreo repetido con sustitución parcial en inventarios sucesivos, ha aumentado la utilización de este método.

Cuando se repiten inventarios, lo ideal es que cada inventario pueda completarse en un solo año o temporada de cultivo, y después repetirlo al cabo de

cierto número de años. Así se tendrían estimaciones de una zona forestal completa para años determinados y las comparaciones pondrían de manifiesto los cambios ocurridos durante el intervalo.

Para zonas forestales limitadas, este procedimiento es muy práctico, pero para grandes propiedades forestales o a escala nacional o regional, rara vez se puede completar un inventario en un solo año o temporada de cultivo. Una de las principales dificultades es que no se dispone de suficiente personal competente y recursos. Además, un programa de trabajo para una zona forestal extensa exige la movilización para una sola temporada de un numeroso equipo de personal capacitado que quedaría sin empleo inmediatamente después.

La dificultad puede superarse, al menos en parte, dividiendo la zona forestal en distritos y, ocupándose cada año de uno o dos de ellos. De esta forma se pueden efectuar una serie de estimaciones que permitan apreciar los cambios ocurridos en cada distrito durante un periodo determinado, y asegurar el empleo continuo de personal capacitado.

El inconveniente de este procedimiento es que las estimaciones que se preparan para toda la zona forestal están basadas en estimaciones parciales obtenidas en fechas diferentes. No es, en realidad, una cuestión muy grave, porque los bosques se administran tomando necesariamente como base unidades de aprovechamiento o distritos, y es más importante tener información fidedigna sobre la evolución de la situación forestal de cada distrito que una serie de datos numéricos de toda la zona forestal, por muy precisos que sean.

6.9 Factores que Influyen en el Costo de los Inventarios.

En principio el costo justificable del inventario se establece en función de los beneficios obtenibles y de la fecha en que se espera que éstos empiecen a aumentar. Se consideran usualmente como beneficios las rentas actuales o futuras proporcionadas por el desarrollo de los bosques o por su mejor aprovechamiento, aunque en ciertos casos, principalmente en relación con la protección forestal, los beneficios no pueden calcularse directamente en dinero.

En el costo de un inventario forestal influyen muchos factores, ya se trate del costo total del proyecto completo o del costo por hectárea. Los principales son:

- a) El tipo de información requerida.
- b) El grado de precisión.
- c) La extensión total de la zona que ha de inventariarse.
- d) Superficie mínima de las unidades forestales.

6.9.1 Tipo de Información Requerida.

La información básica general sobre la extensión de los tipos forestales importantes es poco costosa, relativamente, porque muchos de los datos pueden obtenerse con la ayuda de fotografías aéreas, que requieren pocos gastos si se fotografía en una sola operación una zona extensa. Los costos de la interpretación fotográfica y de la preparación de los mapas forestales a partir de las fotografías son proporcionalmente moderados. La comprobación sobre el terreno de las condiciones del bosque por los equipos de campo será, sin embargo, necesaria en todos los casos, salvo cuando se trata de operaciones de reconocimiento.

Si se necesita información más detallada sobre el régimen de propiedad forestal y de la cantidad de madera, el costo del reconocimiento puede aumentar. Cuando se deseen estimaciones cuantitativas de la madera en pie, se procederá a extensos muestreos sobre las condiciones del terreno. Los técnicos forestales capacitados tendrán que supervisar la identificación y calidad de las especies arbóreas y la cuidadosa medición de la madera; los recientes perfeccionamientos de las técnicas de muestreo y de otros dominios de la estadística permiten, no obstante, obtener esta información a un costo moderado.

La información sobre incrementos y mermas es técnicamente más difícil de obtener y, con frecuencia, es la fase más cara de un inventario forestal. Para poder obtener tales datos con la precisión necesaria, y a costo razonable, hacen falta especialistas de la máxima competencia.

6.9.2 Grado de Precisión.

El grado de precisión deseado influye mucho en el costo; la preparación de estimaciones de suma precisión es, evidentemente, más costosa que la de estimaciones que pueden aceptarse con mayores márgenes de error. La determinación del grado de precisión que ha de asignarse a cada uno de los diferentes elementos del inventario, exigirá, pues, un cuidadoso examen.

6.9.3 Extensión de la Zona Objeto del Inventario.

Las fotografías aéreas necesarias resultarán más económicas por unidad de superficie si la zona que ha de reconocerse es extensa y el proyecto no se limita a unos pocos miles de hectáreas. Las modernas técnicas de reconocimiento, al implicar la aplicación especializada de la fotogrametría e imágenes digitales, de los especialistas en ese procesamiento y de los métodos estadísticos, requieren los servicios de técnicos sumamente especializados, y el costo de estos servicios por unidad de superficie es menor si la zona que hay que reconocer es grande. Las diversas condiciones del bosque y los diferentes problemas y objetivos, cuando se pasa de un lugar a otro hacen difícil, si no imposible, la aplicación de un mismo tipo de inventario a dos proyectos diferentes. Una planificación adecuada y un tipo de inventario bien concebido son de la máxima importancia para obtener la mayor cantidad de información con el menor gasto.

6.9.4 Extensión Mínima de las Unidades de Superficie.

Otro de los principales factores que influyen en el costo es la extensión mínima de la unidad de superficie en el bosque, para la cual han de prepararse estimaciones independientes, de la cantidad de madera o de otras características. Se podrían preparar estimaciones para unidades de 10,000 hectáreas de terrenos forestales con un grado de precisión aceptable y con pocos gastos por hectárea, pero si se desea hacer una estimación independiente para cada bloque de 100 hectáreas de bosque, con el mismo grado de precisión, el costo por hectárea será más elevado. Las estimaciones basadas en grandes unidades de superficie suelen bastar para los planes regionales o nacionales de aprovechamiento mientras que los aprovechamientos forestales intensivos requieren estimaciones de pequeñas unidades de superficie.

6.10 Principios de la Planificación de Inventarios Forestales.

La planificación de un inventario forestal implica el estudio de una serie compleja de problemas. Por una parte, hay que decidir con precisión la información que es realmente necesaria, excluyendo los detalles que no pueden utilizarse prácticamente en las condiciones existentes o previsibles; además, hay

que elegir métodos que proporcionen la información deseada con el mínimo de dinero, tiempo y trabajo; por último, el plan ha de tener muy presente al personal disponible y su formación.

Los errores en la planificación del inventario pueden acarrear una pérdida de tiempo y de dinero particularmente grave, ya que los defectos no siempre son inmediatamente identificables. Especialmente perjudiciales serían los retrasos debidos a la omisión de datos esenciales para decisiones en materia de aprovechamiento, errores graves en el inventario podrán también ocasionar decisiones equivocadas, cuyos efectos durarían muchos años.

La planificación de un inventario forestal exige siempre considerar cierto número de cuestiones: decimos considerar, en lugar de incluir, por una buena razón. No todas estas cuestiones tienen siempre la misma importancia ni necesitan incluirse en todos los inventarios, pero para los fines de la planificación deben tomarse siempre en consideración y después, si no se juzgan de utilidad, podrán eliminarse.

6.10.1 Plan de un Inventario.

Una vez adoptadas las decisiones relativas a la información solicitada y establecido el sistema de clasificación forestal habrá que determinar el procedimiento de obtención de tal información. La preparación de un inventario forestal es un arte en el que el conocimiento y la experiencia del especialista en inventarios se combinan para crear una metodología que dé resultados satisfactorios. Es necesaria una flexibilidad que permita afrontar condiciones forestales, topográficas, económicas y de transporte muy diversas. La necesidad del diseño sólo estará limitada por el ingenio del especialista, dentro del ámbito del resultado final deseado, y por los requisitos estadísticos y económicos.

Se establecerá el procedimiento de obtención de los elementos de los inventarios forestales: zonas, cantidades y características de la madera, incremento y merma. Esta información puede obtenerse por medio de observaciones y mediciones en el campo, por fotografías aéreas, o bien combinando ambos procedimientos.

El método más práctico y útil, muy superior a los demás, es combinar las fotografías aéreas e imágenes de satélite (que se utilizarán para la clasificación o estratificación forestal, para la representación cartográfica y con frecuencia para la determinación de superficies) con el trabajo sobre el terreno, que permitirá obtener

datos detallados sobre las condiciones forestales y la cantidad y calidad de la madera. Se puede también recurrir únicamente a los trabajos de campo, pero se obtienen resultados menos eficaces (cuesta más y la información es la misma), lo cual no es recomendable cuando puede utilizarse la fotografía aérea o imágenes de satélite.

Se puede también, en ciertas circunstancias, basar completamente el inventario forestal en la interpretación y medida de las fotografías aéreas u otras imágenes, pero este procedimiento casi nunca es satisfactorio, ya que la información que puede obtenerse directamente con las fotografías aéreas o imágenes de satélite es limitada porque sólo puede conocerse aproximadamente la cantidad, especie, calidad y tamaños de las maderas.

Otros factores que limitan también este método son la calidad de las imágenes, la disponibilidad de medios auxiliares como tablas volumétricas para ese propósito, las técnicas para distinguir las especies, y la experiencia y pericia de los intérpretes de las fotografías y otras imágenes.

6.10.2 Esquema para Planes de Inventario Forestal.

El siguiente esquema o guión se presenta como un ejemplo de formato utilizable en la preparación de proyectos de inventarios forestales.

Se da este ejemplo con el conocimiento de que no hay un único esquema que puede usarse en todos los casos, pues la estructura del guión tiene necesariamente que variar según las necesidades del inventario. Lo importante es que la redacción de un plan tenga en cuenta todos los puntos que se van a considerar a continuación:

6.10.2.1 Objetivos del inventario.

- 1) Definición general de los objetivos en colaboración con los usuarios potenciales de los resultados del inventario.
 - 2) Prioridad de los objetivos.
 - 3) Solicitudes adicionales (para ser discutidas con los especialistas interesados: edafólogos, ecólogos, botánicos, etcétera).
 - 4) Especificaciones detalladas de los objetivos.
 - a) Límites exactos y magnitud de la superficie objeto del inventario.
-

- b) Fraccionamiento de la superficie.
- c) Naturaleza de la información requerida.
- d) Forma de presentar la información.
- e) Precisión de los resultados.

6.10.2.2 Información general.

- 1) Autoridad responsable del inventario y otros departamentos colaboradores.
- 2) Información y datos disponibles sobre el área objeto de inventarios, de estudios anteriores, informes, mapas, imágenes obtenidas por sensores remotos, referentes a:
 - a) Descripción general del bosque.
 - b) Variabilidad de los parámetros objetos de medida.
 - c) Condiciones del terreno, accesibilidad, facilidad de transporte.
- 3) Recursos disponibles para la realización del inventario.

6.10.2.3 Diseño de inventario.

- 1) Esquema del diseño de inventario a utilizar.
- 2) Descripción general de las diversas fases:
 - a) Estudios aéreos, interpretación de las imágenes de sensores remotos.
 - b) Mapificación y procedimientos de estimación de superficies.
 - c) Relación completa de los métodos de muestreo para el registro de las características del bosque.
 - d) Relaciones utilizables para transformar los datos cuantitativos estimados de masas, por ejemplo tabla de volúmenes.

6.10.2.4 Procedimiento de medición.

- 1) Descripción del diseño para los trabajos de campo y gabinete, en particular, tamaño, forma, número y distribución de las parcelas de muestreo (sitios), para conseguir la precisión requerida.
- 2) Procedimiento de interpretación de imágenes de sensores remotos (fotos aéreas u otras).
 - a) Instrucciones detalladas sobre todas las técnicas.
 - b) Equipo de trabajo y descripción de obligaciones.
 - c) Instrumentos.
 - d) Formularios y registros.
- 3) Organización de los trabajos de campo.

- a) Organización de equipo y descripción de obligaciones.
- b) Procedimientos de transporte.
- c) Instrucciones para acampar.
- d) Provisiones para soporte logístico
- 4) Instrucciones de campo incluyendo detalles para:
 - a) Localización de los sitios de muestreo.
 - b) Replanteo de las unidades o sitios de muestreo.
 - c) Mediciones en los sitios de muestreo.
 - d) Instrumentos e instrucciones para su uso.
 - e) Mediciones en árbol y en parcela o sitio.
 - f) Otras mediciones y crecimiento, daños de insectos, mortalidad, suelo, condiciones topográficas, etcétera.
 - g) Diseño de formularios y registro de las observaciones.

6.10.2.5 Procesamiento de la información.

- 1) Instrucciones detalladas para el procesamiento de los datos:
 - a) Fórmulas para estimaciones de medias, de totales y sus errores de muestreo.
 - b) Procedimientos matemáticos necesarios.
- 2) Métodos de cálculo y recopilación.
 - a) Descripción de los aparatos de cálculo (calculadoras, computadoras, etcétera).
- 3) Descripción detallada de todas las fases de cálculo, desde los datos brutos en los formularios originales a los resultados finales (para computación electrónica, descripción de las entradas, programas y salidas).

6.10.2.6 Informe final.

- 1) Plan general (se hace notar que el plan de inventario con algunas modificaciones puede servir de base para el informe final).
 - 2) Tiempo estimado para su realización.
 - 3) Costo estimado para su realización.
 - 4) Responsable de redacción.
 - 5) Método de publicación.
 - 6) Número de copias.
 - 7) Distribución.
-

6.11 Consideraciones Estadísticas en Inventarios Forestales.

6.11.1 Población.

Es una totalidad de individuos que tienen ciertas características comunes, y puede tener un número finito o infinito de elementos. Por ejemplo, un bosque se considera como un conjunto de un número finito de parcelas contiguas de igual o desigual tamaño, o como un conjunto de todos los árboles que viven en el bosque. Una zona sobre un mapa se considera como la suma de un número infinito de puntos, cuando se usa un muestreo por medio de red de puntos para estimar su superficie. Sin embargo, cuando tenemos una población finita y la selección de sus integrantes se hace con reemplazo, ésta se convierte en población infinita. Aunque considerando el caso de muestreo, si la muestra representa menos del 5 % de la población, ésta suele considerarse infinita.

6.11.2 Muestra.

Es una parte de una población, por ejemplo, en un bosque de 100 ha la población la forma el bosque que cubre las 100 ha y la muestra sería el bosque que cubre 1, 2, 3 ó más hectáreas.

6.11.3 Parámetro.

Es una medida descriptiva que caracteriza a una población, por ejemplo, el volumen total, el volumen por hectárea, el área basal total, el diámetro medio, el número de árboles, etcétera, de toda la población (100 ha).

6.11.4 Estimadores.

Es una medida descriptiva que caracteriza a una muestra; por ejemplo, el volumen total, el área basal, el diámetro medio, el número de árboles, etcétera, de la muestra (1, 2 ó más hectáreas). Los estimadores estiman a los parámetros.

Normalmente los parámetros se simbolizan con letras del alfabeto griego y los estimadores con letras del alfabeto latino, como se muestra en la **Tabla 15**.

Tabla 15. Símbolos de parámetros y de estimadores.

Medidas descriptivas de la población (parámetros).	Medidas descriptivas de las muestras (estimadores).
N: Número de individuos o unidades de	n: Número de individuos o unidades de

Tabla 15. Símbolos de parámetros y de estimadores.

Medidas descriptivas de la población (parámetros).	Medidas descriptivas de las muestras (estimadores).
la población.	la muestra.
μ : Promedio de la población (media poblacional).	\bar{x} : Promedio de la muestra (media muestral).
σ : Desviación estándar.	s : Desviación estándar.
β : Coeficiente de regresión. Etc.	b : Coeficiente de regresión. Etc.

6.11.5 Variables.

Se da el nombre de variable a una característica que adopta diferentes formas o modalidades, en otras palabras, que su manifestación es diferente de acuerdo al individuo, así por ejemplo, el volumen comercial por hectárea, la altura de los árboles, el número de árboles existentes en una categoría diamétrica, el color del follaje de una especie forestal, son diferentes tipos de variables.

De acuerdo con lo anterior se advierte que las variables pueden ser de dos tipos, aquellas que se expresan numéricamente, por ejemplo longitud de traqueidas, anchura de fibra, diámetro normal, etcétera, y las que se dan en función de categorías mutuamente excluyentes, por ejemplo forma del cono; tipo de escamas, color de la corteza, etcétera. Las primeras se conocen como variables cuantitativas, las segundas como variables cualitativas.

Para poder llevar a cabo un análisis estadístico es necesario que la variable considerada esté expresada numéricamente. Esto, desde luego, no implica ningún problema cuando se trabaja con variables cuantitativas. En el caso de variables cualitativas es necesario recurrir a índices numéricos o a alguna otra forma de expresar condiciones cualitativas en función de números.

Es notorio que algunas variables pueden adoptar cualquier valor dentro de su amplitud de variación, como sucede con el diámetro de los árboles. Así por ejemplo, pueden tenerse individuos con diámetro normal de 32 cm, de 32.2, de 32.22, de 32.222, etcétera. Pero al hacer referencia al número de árboles en la categoría diamétrica de 30 cm, se tendrán 50 ó 51, pero nunca 50.3. Estos conceptos han hecho referencia a otra clasificación de las variables, continuas, en el primer caso y discretas, en el segundo.

6.11.6 Muestreo.

Es el arte de tomar una o más muestras de la población, o sea tomar un grupo de unidades de la población.

6.11.7 Unidades de Muestreo.

Es la más importante en estadística y equivale al individuo aunque en inventario forestal equivale comúnmente a la unidad de registro, puede ser: rodales, sitios de área fija, fajas, puntos de muestreo, etcétera.

El total agregado de estas unidades de muestreo constituye la población, y el grupo de unidades elegidas para medirse constituye la muestra.

6.11.8 Media.

La media o promedio aritmético de una población o universo se obtiene sumando todas las medidas hechas y dividiendo entre el número de medidas u observaciones.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \text{ Media poblacional} \qquad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ Media muestral.}$$

6.11.9 Medidas de Dispersión.

Al grado en que los datos numéricos tienden a extenderse alrededor de un valor medio se les llama variación o dispersión de los datos.

Se utilizan distintas medidas de dispersión o variación; las más empleadas son: desviación media, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y pocas más.

La comparación de cada observación con su media se conoce como desviación. Ésta se hace por diferencia, el resultado obtenido puede ser positivo o negativo.

$$\text{Desviación individual} = (x_i - \bar{x})$$

Con la suma de las desviaciones de las observaciones o medidas entre el número de ellas se obtiene la desviación media. La suma de las desviaciones se hace sin tomar en cuenta el signo de ellas.

$$\text{Desviación media} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Una mejor medida de la variación que la desviación media es la desviación estándar o desviación típica, que se calcula determinando primero las desviaciones individuales de cada medida; éstas se elevan al cuadrado y se suman, luego se dividen entre el número de medidas u observaciones menos uno y así obtenemos el cuadrado de la desviación estándar, que se conoce también como varianza, que es también una medida de dispersión muy utilizada para tal objeto:

s^2 = Varianza muestral

n = Número de elementos de la muestra

x_i = Observación o medida

\bar{x} = Media muestral

σ^2 = Varianza poblacional

N = Número de elementos de la población

X_j = Observación o medida

μ = Media poblacional

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$$

Otras formas operativas de expresar la varianza son las siguientes:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}{n - 1}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}{N}}{N}$$

Sacando raíz cuadrada a la varianza, obtenemos la desviación estándar o desviación típica:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}}$$

Otras formas de expresar la desviación estándar son las siguientes:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}{n-1}} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}{N}}{N}}$$

Si se estiman dos parámetros de la misma población X e Y , se puede definir una medida conjunta de variabilidad, llamada covarianza.

6.11.10 Covarianza.

Con mucha frecuencia, cada unidad de una población tendrá más de una sola característica. Los árboles, por ejemplo, pueden estar caracterizados por su altura, diámetro y conformación. La covarianza es una medida de la asociación entre las magnitudes de dos características. Si la asociación existente es pequeña o nula, la covarianza estará próxima a cero. Si los valores grandes de una característica tienden a estar asociados con los valores pequeños de otra característica, la covarianza será negativa. Si los valores grandes de una característica tienden a estar asociados con los valores grandes de otra característica, la covarianza será positiva. La covarianza de la población de X y de Y se simboliza frecuentemente por σ_{XY} , la estimación muestral por S_{xy} .

Supóngase que para un número de árboles escogidos al azar se han obtenido valores del diámetro (en centímetros), y de la edad (en años). Si simbolizamos el diámetro por Y y a la edad por X , la covarianza muestral del diámetro y la edad queda dada por:

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n}}{n-1}$$

Esto es equivalente a la fórmula:

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

Si $n = 12$ y los valores de X y de Y fuesen como sigue:

X	20	40	30	45	25	45	30	40	20	35	25	40
Y	4	9	7	7	5	10	9	6	8	6	4	11

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 395 \qquad \sum_{i=1}^{12} y_i = 86$$

Entonces,

$$S_{xy} = \frac{(20)(4) + (40)(9) + \dots + (40)(11) - \frac{(395)(86)}{12}}{11}$$

$$S_{xy} = \frac{2,960 - 2,830.83}{11} = 11.7427$$

La covarianza positiva es consistente con el hecho conocido, y económicamente desafortunado, de que los mayores diámetros tienden a estar asociados con las mayores edades.

6.11.11 Coeficiente de Variación.

Algunas veces es necesario disponer de una medida de dispersión relativa que sea independiente de la unidad de medida usada. Esta medida es el coeficiente de variación que se define como: “La relación existente entre la desviación estándar y la media o promedio aritmético de la población o de la muestra expresada en porcentaje”.

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} * 100 \qquad cv = \frac{s}{\bar{x}} * 100$$

CV	=	Coeficiente de variación poblacional.
σ	=	Desviación estándar poblacional.
μ	=	Media poblacional.
cv	=	Coeficiente de variación muestral.
s	=	Desviación estándar muestral.
\bar{x}	=	Media muestral.

6.12 Muestreo en Inventarios Forestales.

6.12.1 Importancia del Muestreo.

El muestreo estadístico es una herramienta de mucha utilidad en la mayoría de los inventarios forestales, por razones económicas y de tiempo. Las poblaciones objeto de inventario, por ejemplo poblaciones de parcelas forestales, poblaciones de árboles para la construcción de tablas de volúmenes o para evaluación de cortas, etcétera, son normalmente demasiado grandes para ser enumeradas completamente o para censarlas, razón por la cual es conveniente recurrir al muestreo, ya que éste nos proporciona la información necesaria a un costo mucho menor y con mayor rapidez.

6.12.2 Objetividad del Muestreo.

El muestreo debe ser objetivo para no introducir sesgos personales en las estimaciones. Un inventario forestal que emplee parcelas seleccionadas subjetivamente, por ejemplo selección basada en la experiencia y el conocimiento del área por parte del diseñador, no puede dar estimaciones válidas. Objetividad no siempre es sinónimo de estimación insesgada de parámetros. Puede usarse deliberadamente una estimación no centrada, sabiendo que la cuantía del sesgo es menor que un límite dado. La *estimación de razón* es un tipo de estimación sesgada, que es útil en muchos casos.

Tampoco objetividad es sinónimo de aleatoriedad. Muchos diseños de muestreo sistemáticos son objetivos y dan estimaciones insesgadas, aunque en la mayor parte de los casos un muestreo sistemático por fajas no puede considerarse como aleatorio. El único inconveniente de las muestras de este tipo es que su falta de aleatoriedad impide la exacta aplicación de la teoría estadística del muestreo y las estimaciones de los errores pueden tener sesgos, pero en ocasiones producen estimadores tan buenos y aún mejores que el muestreo aleatorio.

6.12.3 Errores en Muestreo Forestal.

6.12.3.1 Error estándar.

Es una medida que indica la variación del promedio. Si, por ejemplo, en un mismo bosque se hacen seis inventarios independientes, se extraen las seis muestras y se calculan los promedios, habrá por lo tanto seis promedios para ese bosque que, lógicamente, no serían iguales, por lo tanto tendrán alguna variación. La desviación estándar de estos promedios se denomina error estándar ($S_{\bar{x}}$). En la práctica no es necesario extraer varios promedios mediante muestreo, porque el error estándar se calcula con base en la desviación estándar obtenida de un solo muestreo mediante la siguiente fórmula:

$$S_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{o} \quad S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

$S_{\bar{x}}$	=	Error estándar.
s^2	=	Varianza.
s	=	Desviación estándar.
n	=	Número de lotes o unidades de muestreo.

En algunos casos (poblaciones finitas) el error estándar se multiplica por un factor de corrección, como a continuación se explica.

6.12.3.2 Factor de corrección para poblaciones finitas.

Si el bosque se divide en N unidades y en el muestreo se toman n unidades, la relación n/N se denomina fracción de muestreo o intensidad de muestreo. El error de muestreo se debe a la parte que no se incluyó en el inventario o sea a la fracción $1-n/N$. Cuando se mide todo el bosque esta fracción será cero porque en ese caso $n = N$.

El valor de $\sqrt{1 - \frac{n}{N}}$ recibe el nombre de factor de corrección para poblaciones finitas porque se multiplica por el error estándar y se obtiene un valor más apropiado. Este factor se omite cuando n es muy pequeño y N es muy grande, generalmente cuando la fracción de muestreo es igual o menor al 5 %.

En inventarios, lo que se hace es un muestreo sin reemplazo, y por esta razón se considera al bosque como población finita, pero la fracción de muestreo suele ser menor al 5 %. Por lo tanto, para calcular correctamente el error estándar se aplica la fórmula:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

En el caso de poblaciones infinitas se reduce a:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}} \qquad s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

6.12.3.3 Error de muestreo.

Como todos los inventarios forestales están sujetos a errores, éstos pueden agruparse en dos clases: errores debidos al muestreo y errores no debidos al muestreo. Tomados en conjunto hacen el error total o de estimación o exactitud. Este error total es la diferencia entre la estimación hecha a partir de la muestra y el valor verdadero de la población, por ejemplo:

Supóngase que en un bosque el verdadero volumen por hectárea es 50 m^3 ($\mu = 50 \text{ m}^3$). Si se toma una muestra de ese bosque y se obtiene un valor de $45 \text{ m}^3/\text{ha}$ ($\bar{x} = 45 \text{ m}^3/\text{ha}$), la diferencia $\bar{x} - \mu$ es un error de estimación o exactitud o sea $45 - 50 = -5 \text{ m}^3$. En este caso hay una subestimación. El error es -5 m^3 , o en porcentaje respecto a la media (\bar{x}), sería igual a -11% porque $\frac{-5}{45} 100 = -11\%$.

En los inventarios nunca se sabe el valor de μ y no se puede determinar el error de estimación. Este error se estima recurriendo a cálculos estadísticos que dan un valor con el signo \pm , en este caso el error toma el nombre de error de muestreo o precisión.

La causa para que haya error de estimación se debe al hecho de que la muestra mide sólo una parte del bosque. Si se midiera todo el bosque, el error sería cero. Por lo tanto, ese error se debe a la parte del bosque que no se midió y por ello se denomina error de muestreo.

Además, dentro del error de muestreo que se calcula se incluyen otros errores debidos a malas medidas, equivocaciones, malos cálculos, etcétera. Por lo tanto se debe recordar que lo que se llama error de muestreo contiene otros errores.

El error de muestreo es igual al error por la muestra más otros errores, y sería mejor decir: El error total es igual al error por el muestreo más errores debidos a otras causas.

Es conveniente recordar que en los muestreos el error de muestreo es igual al error total; si no existen errores no debidos al muestreo, entonces el error total es equivalente al error de muestreo.

Como es muy difícil conocer el valor de la media poblacional (μ), sobre todo en poblaciones infinitas, para conocer el error de estimación, estadísticamente este error se estima con la fórmula del error de muestreo:

$$E = \pm s_{\bar{x}} * t$$

E = Error de muestreo

$s_{\bar{x}}$ = Error estándar de la muestra

t = Valor en tablas de t de Student

Cuando el error de muestreo se expresa en porcentaje del promedio, la fórmula es la siguiente:

$$E\% = \frac{s_{\bar{x}} * t}{\bar{x}} * 100$$

El valor de t , generalmente se obtiene de las tablas de t de Student, a partir del número de unidades de muestreo n ; utilizando n cuando las unidades de muestreo pasan de **30**, y $n - 1$ cuando son menos de **30**. A n y $n-1$ también se les llama **grados de libertad (GL)**.

Cuando se trata de presentar el resultado final, por ejemplo el volumen por hectárea, se debe indicar el error de muestreo:

Vol/ha es igual al promedio calculado \pm error de muestreo. Como se usa \pm se obtienen dos valores o límites de confianza.

Promedio calculado + error de muestreo = L_1

Promedio calculado - error de muestreo = L_2

Al segundo valor se le designa como L_2 (límite inferior) y es el valor que se denomina **volumen confiable**.

6.12.3.4 Límites de confianza.

Las estimaciones muestrales están sujetas a variación. Cuando varían dependen primeramente de la variabilidad inherente de la población (σ^2), del tamaño de la muestra (n) y de la población (N).

El procedimiento estadístico de indicar la confiabilidad de un estimador es el establecimiento de límites de confianza. Para estimadores hechos de poblaciones normalmente distribuidas, los límites de confianza están dados por:

*Límites de confianza = Estimador \pm (t * error estándar del estimador)*

$$\text{Límites de confianza} = \bar{x} \pm \left(t_{(\alpha, gl)} * S_{\bar{x}} \right)$$

Para definir los límites de confianza de la media ya se tiene todo lo necesario, excepto el valor de t , y ése se puede obtener de la tabla de la distribución de t de Student. En esta tabla la columna titulada **GL** (grados de libertad) se refiere al tamaño de la muestra. Para la media de una muestra simple al azar escogeríamos un valor de t con $(n-1)$ grados de libertad. Las columnas que tienen por encabezado probabilidad se refieren al grado de improbabilidad que se demanda. Si queremos decir que la media verdadera cae dentro de ciertos límites a menos que haya ocurrido una posibilidad de uno en veinte, usamos el valor de t en la columna cuyo encabezado es **0.05**. Si queremos decir que el valor real se encuentra dentro de un juego dado de límites a menos que haya ocurrido una probabilidad de uno en cien, escogemos t de la columna cuyo encabezado es **0.01**.

Por ejemplo: Se tiene una muestra $n = 20$ unidades, a la cual se le calculó una media de $\bar{X} = 10.7$ y un error estándar de $S_{\bar{x}} = 0.734$. Para los límites de 95% de confianza sobre la media usaríamos un valor de t de la columna **0.05** y la hilera correspondiente a **19 G.L.** Como $t_{0.05} = 2.093$, los límites de confianza están dados por:

$$\text{Límites de confianza} = \bar{x} \pm t_{(0.05, 19)} * S_{\bar{x}} = 10.7 \pm (2.093 * 0.734).$$

$$\text{Límite superior} = 10.7 + (2.093 * 0.734) = 12.236.$$

$$\text{Límite inferior} = 10.7 - (2.093 * 0.734) = 9.164.$$

Esto dice que, a menos que haya ocurrido una posibilidad de 1 en 20 en el muestreo, la medida de la población se encuentra entre 9.164 y 12.236. No dice dónde podría caer la media de muestras futuras de esta población. Tampoco dice dónde puede estar la media si se han cometido errores en las mediciones.

Para los límites de 99% de confianza, encontramos $t_{0,01} = 2.861$ (con **19 GL**), y así los límites son:

$$\text{Límites de confianza} = 10.7 \pm (2.861 * 0.734).$$

$$\text{Límite superior} = 10.7 + (2.861 * 0.734) = 12.799.$$

$$\text{Límite inferior} = 10.7 - (2.861 * 0.734) = 8.600.$$

Estos límites son más amplios, pero es más probable que incluyan a la verdadera media de la población.

Para muestras grandes ($n = 60$) los límites de 95 % de confianza se estiman con una aproximación razonable por medio de:

$$\text{Estimador} \pm (2 * \text{Error estándar del estimador}).$$

Y los límites de 99% por:

$$\text{Estimador} \pm (2.6 * \text{Error estándar del estimador}).$$

6.12.4 Intensidad de Muestreo.

La intensidad o fracción de muestreo es la relación porcentual de la superficie de la muestra con respecto a la superficie total, y se calcula por medio de la fórmula siguiente:

$$IM = \frac{n}{N} * 100$$

IM = Intensidad de muestreo en porcentaje.

- n = Número de unidades de la muestra.
 N = Número de unidades de toda la población.

Cuando se dice que se utilizará una *IM* de **6%**, quiere decir que se muestrearán 6 ha de cada 100 ha y si se emplean sitios o unidades muestrales de 0.1 ha cada uno (1000 m²), se tendrán que medir 60 sitios en cada 100 ha.

Normalmente, en inventarios forestales se han utilizado intensidades de muestreo del orden de 1%, 0.5% y 0.1%, dependiendo de varios factores; superficie por inventariar, factores económicos, precisión requerida, etcétera.

La intensidad varía según la precisión con que se deseen medir las características del bosque y está en función de dos consideraciones.

- ⚡ Económicas (a mayor intensidad, más costo y viceversa).
- ⚡ Estadísticas (a mayor intensidad más precisión y viceversa).

6.12.5 Tamaño de Muestra.

El número de observaciones necesarias en una muestra, dependerá de la precisión deseada y de la variabilidad inherente de la población muestreada. Puesto que la precisión muestral se expresa a menudo en términos de intervalo de confianza sobre la media, no resulta fuera de la razón el decir, en la planeación de un inventario, que en el intervalo de confianza calculado $\bar{x} \pm \left(t_{(\alpha, gl)} * S_{\bar{x}} \right)$, nos interesaría que el producto $t_{(\alpha, gl)} * S_{\bar{x}}$ fuese igual o menor que algún valor específico *E* (error), a menos que haya ocurrido una posibilidad de uno en veinte o uno en cien, (dependiendo de la probabilidad utilizada) al muestrear. Esto es que queremos:

$$t_{(\alpha, gl)} * S_{\bar{x}} = E$$

Puesto que $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$, queremos que: $t_{(\alpha, gl)} * \frac{s}{\sqrt{n}} = E$

Despejando *n* obtendremos el tamaño de muestra deseado:

$$n = \frac{t^2 S^2}{E^2}$$

Para aplicar esta ecuación necesitamos tener una estimación de (s^2), la varianza de la población y un valor de la t de Student a nivel apropiado de probabilidad.

La estimación de la varianza puede ser un verdadero problema. Una solución consiste en hacer un muestreo, donde se escoja al azar un número determinado de sitios a medir y de éstos se calcula un estimador (s^2) de la varianza. Entonces este valor se sustituye en la ecuación del tamaño de la muestra.

El valor de t se obtiene de la tabla de t de Student con un nivel apropiado de probabilidad, 95% o 99% y $n-1$ grados de libertad.

E , el error permitido, lo podemos prefijar, pues es lo que estamos dispuestos a aceptar, dependiendo de la precisión que se requiera.

Es importante que el error especificado (E) y la varianza estimada (s^2) se encuentren en la misma escala de medición, por ejemplo, no podríamos usar una varianza en pies tabla en conjunción con un error expresado en pies cúbicos.

Por esta razón gran cantidad de investigadores recomiendan diferentes tipos de fórmulas para el cálculo del tamaño de muestra, dependiendo de las unidades en que se exprese el error y la variabilidad, como la siguiente:

$$n = \frac{t^2 CV^2}{E_{\%}^2}$$

En esta fórmula, al utilizar como medida de variabilidad el coeficiente de variación estamos obligados a utilizar el error en porcentaje, ya que el CV está expresado en porcentaje.

Cuando el muestreo es sin reemplazo (como lo es en la mayoría de las situaciones de muestreo forestal), las estimaciones para el tamaño de la muestra que se dieron antes, se utilizan en poblaciones con un número de unidades extremadamente grande (N), de tal forma que la fracción de muestreo (n/N) es muy pequeña. Si la fracción de muestreo no es pequeña (digamos $n/N \geq 0.05$) entonces las estimaciones del tamaño de la muestra deben ajustarse. Este valor ajustado de n es:

$$n_a = \frac{n}{1 + \frac{n}{N}}$$

Una expresión más para el cálculo del tamaño de la muestra un poco más complicada pero más precisa es:

$$n = \frac{t^2 CV^2}{E_{\%}^2 + \frac{t^2 CV^2}{N}}$$

N es igual al tamaño de la población a muestrear en número de sitios del tamaño que se haya definido.

Si tenemos una superficie de **10,000** ha por inventariar y un tamaño de sitio de **0.1** ha tendremos lo siguiente:

Si se van a utilizar sitios de **0.1** ha, en **1** ha se tendrán **10** sitios y en **10,000** ha se tendrán **100,000** sitios por lo que $N = 100,000$.

Los valores de t y E , pueden ser prefijados por el inventariador, pero s o CV son valores experimentales y para su obtención se necesita un premuestreo.

A continuación se expondrá un ejemplo numérico para la aplicación de las consideraciones estadísticas más importantes:

En tres bosques diferentes se midieron cinco lotes o parcelas de igual área, tomados al azar, y se obtuvieron los datos de la **Tabla 16**.

En estos tres tipos de bosque se observa que los tres tienen el mismo promedio y no por ello podemos decir que son iguales, pues el rango (que es la diferencia entre el valor más grande y el más chico) nos está diciendo que existe variabilidad, aunque ésta se puede determinar con mayor precisión.

El valor del rango en el Bosque A = 0 nos está diciendo que este bosque es 100 % homogéneo en volumen, no así para los bosques B y C. Los valores de volumen (x_i) y del volumen al cuadrado x_i^2 , para el cálculo de los principales estadísticos se consignan en la **Tabla 17**. El cálculo de los estadísticos de los bosques B y C se consigna en la **Tabla 18**.

Tabla 16. Volumen en lotes de tres bloques con el mismo promedio y diferente variabilidad.

Núm. de lote.	Bosque A (m ³ /lote).	Bosque B (m ³ /lote).	Bosque C (m ³ /lote).
1	20	25	50
2	20	15	2
3	20	20	10
4	20	28	8
5	20	12	30
TOTAL	100	100	100
PROMEDIO	20	20	20
RANGO	0	16	48

Tabla 17. Valores en los Bosques B y C para el cálculo de estadísticos.

Num. de lote	Lote B		Lote C	
	x _i (m ³ /lote)	x _i ²	x _i (m ³ /lote)	x _i ²
1	25	625	50	2500
2	15	225	2	4
3	20	400	10	100
4	28	784	8	64
5	12	144	30	900
n = 5	Σx_i = 100	Σx_i² = 2178	Σx_i = 100	Σx_i² = 3568

Tabla 18. Cálculo de los estadísticos de los bosques B y C.

Fórmula	Cálculo	Estadístico
B o s q u e B		
Media: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$	$\bar{x} = \frac{25+15+20+28+12}{5} = \frac{100}{5}$	$\bar{x} = 20$
Varianza: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}{n-1}$	$s^2 = \frac{2178 - \frac{100^2}{5}}{5-1} = \frac{2178 - 2000}{4} = \frac{178}{4}$	$s^2 = 44.5$

Tabla 18. Cálculo de los estadísticos de los bosques B y C.

Fórmula	Cálculo	Estadístico
Desviación estándar: $s = \sqrt{s^2}$	$s = \sqrt{44.5}$	$s = \pm 6.67$
Coef. de variación: $CV = \frac{s}{x} 100$	$CV = \frac{6.67}{20} 100$	$CV = 33\%$
Error estándar: $s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$	$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{44.5}{5}}$	$s_{\bar{x}} = \pm 2.98$
B o s q u e C		
Media: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$	$\bar{x} = \frac{50 + 2 + 10 + 8 + 30}{5} = \frac{100}{5}$	$\bar{x} = 20$
Varianza: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n}}{n-1}$	$s^2 = \frac{3568 - \frac{100^2}{5}}{5-1} = \frac{3568 - 2000}{4} = \frac{1568}{4}$	$s^2 = 392$
Desviación estándar: $s = \sqrt{s^2}$	$s = \sqrt{392}$	$s = \pm 19.8$
Coef. de variación: $CV = \frac{s}{x} 100$	$CV = \frac{19.8}{20} 100$	$CV = 99\%$
Error estándar: $s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$	$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{392}{5}}$	$s_{\bar{x}} = \pm 8.8$

Podemos concluir que, a pesar de que los tres bosques (A, B y C) tienen un mismo promedio, el más homogéneo es el bosque A, quedando en un punto intermedio el bosque B y siendo el más variable el bosque C (**Tabla 19**).

Tabla 19. Resumen de los estadísticos de tres bosques con el mismo volumen promedio y diferente variabilidad.

Bosque	Media (\bar{x})	Rango (R)	Varianza (s^2)	Desviación estándar (s)	Error estándar ($s_{\bar{x}}$)	Coficiente de variación (CV)
A	20	0	0.0	0.0	0.0	0
B	20	16	44.5	6.7	3.0	15%
C	20	48	392.0	19.8	8.8	43%

6.13 Diseño de Muestreo.

Para efectos de este texto se estudiará el diseño de muestreo como tradicionalmente se ha desarrollado (con su respectiva actualización), ya que profundizar sobre muestreo o diseños de muestreo es materia del muestreo forestal como materia, que debe estar muy ligada con la Dasometría en su capítulo de inventarios forestales.

Un diseño de muestreo debe ir acorde con los objetivos del inventario y estar determinado por la clase de unidades de muestreo, su tamaño y forma, o si se basan en área, el número de ellas a utilizar y la manera de selección y distribución resultante en el área del bosque, seguido por los procedimientos de medición en las unidades seleccionadas y el análisis de los datos resultantes, así como un informe final del trabajo. El diseñador de un inventario forestal tiene una amplia gama para formular el diseño al variar las especificaciones para cada uno de los elementos antes señalados, a un grado de precisión deseado y a un costo mínimo o especificado.

Los diseños de muestreo que usan unidades de área fija se iniciaron en Europa en el siglo XIX. Todavía son muy utilizados, aun cuando el muestreo con probabilidad variable, específicamente el muestreo por puntos, ha sido empleado en años recientes en forma creciente.

Es esencial entender que no hay un diseño de muestreo que pueda ser aplicado universalmente. El diseño a emplear es el resultado final de una serie de consideraciones, cada una de las cuales tiene influencia en la manera con que se llevará a cabo el muestreo. Los factores que tienen mayor influencia en el diseño son:

- a) Información requerida y precisión deseada.
- b) Composición del bosque y su variabilidad.
- c) Topografía y accesibilidad del bosque.
- d) Disponibilidad de personal y nivel de adiestramiento.
- e) Tiempo y dinero disponible para el trabajo.
- f) Disponibilidad de fotografías aéreas y mapas.
- g) Conocimiento del diseñador en estadística y muestreo.

También es conveniente estudiar los componentes de un diseño de muestreo, los cuales se reducen a tres:

- a) Forma de las unidades muestrales.
- b) Tamaño de las unidades muestrales.
- c) Distribución de las unidades muestrales.

6.13.1 Forma y Tamaño de las Unidades Muestrales (Sitios de Muestreo).

En la actualidad (y con mucha frecuencia), se han utilizado los sitios de dimensiones variables, especialmente en el muestreo por puntos, cuyos aparatos más utilizados son: la cuña óptica, el relascopio de Bitterlich y el tele-relascopio de Bitterlich.

También se han utilizado sitios sin forma, muy empleados para la toma de datos de incremento (tres árboles más cercanos al centro de un sitio o punto de muestreo).

Como se expresó anteriormente, en estas notas se estudiará la forma y tamaño de sitios que tradicionalmente se han utilizado, o sea los sitios o unidades de muestreo de área fija.

Para determinar la forma de los sitios de muestreo se deben considerar, básicamente, los problemas prácticos que se puedan presentar al delimitar directamente en el campo, las diferentes formas factibles de uso, los objetivos mismos del inventario, la zona por inventariar, etcétera.

Los sitios de muestreo pueden tener la forma que más convenga a las posibilidades y tiempo disponibles, de tal manera que podamos tener sitios cuadrados, rectangulares, circulares, triangulares, romboidales, irregulares, etcétera, aunque las tres formas geométricas que más se han utilizado en inventarios forestales son: cuadradas, circulares y rectangulares, pues resultaría muy laboriosa la delimitación en el terreno de cualquier otra forma diferente a las antes citadas; representaría la utilización de más tiempo y costo, principalmente.

6.13.1.1 Sitios cuadrados.

De las tres formas anteriormente citadas, los cuadrados son los que menos se han utilizado, la razón es que, para delimitarlos en el terreno es necesario trazar el cuadro “a rumbo y distancia”, el cual, muchas veces, en terrenos accidentados “no

cierra”, modificándose de esta manera la superficie establecida para el sitio, cuando se trata de sitios relativamente grandes, ya que en superficies de sitios pequeños (100 m^2) puede considerarse que la delimitación se hace sin mucho riesgo de error.

6.13.1.2 Sitios circulares.

Los sitios circulares son los que más frecuentemente se usan en inventarios forestales en América del Norte, incluyendo a México, y del noroeste de Europa, especialmente Escandinavia y Finlandia, principalmente en bosques de clima templado y frío. Su gran popularidad radica en la relativa facilidad para delimitarlos, ya que una vez establecida la posición de su centro basta con “lanzar” radios desde éste hacia la periferia (**Figura 104**); generalmente se “lanzan” de 8 a 12 radios en zonas con una densidad de arbolado alto y menos de 8 en densidades bajas.

Los tamaños o superficies más adecuadas para un sitio circular, estarán en función de lo que se quiera evaluar.

Los sitios circulares en muestreos sistemáticos, generalmente se localizan a equidistancias a lo largo de líneas que son también equidistantes entre sí. Esto significa, que la muestra quedará distribuida en forma de círculos ubicados a determinadas distancias en un sentido u otro, lo cual permite una amplia distribución. En muestreos al azar, la ubicación de los círculos que constituyen la muestra, se realiza con base en eventos aleatorios que distribuyen los sitios sin un orden preestablecido.

Se sugiere que para la mayoría de los trabajos de cuantificación se empleen sitios de 1000 m^2 para medir árboles que tienen un diámetro igual o mayor al límite inferior de la clase diamétrica mínima establecida y para cuantificar existencias volumétricas, generalmente de la clase diamétrica de 15 cm y en algunos casos de 10 cm (**Figura 105 y Tabla 20**).

Como se consigna en las figuras y tablas citadas, en caso de que se requieran mediciones de árboles de menores dimensiones, que constituyen la incorporación (con diámetros menores al límite inferior de la clase diamétrica de 10 ó 15 cm) y que estén próximos a pasar a la categoría mínima inventariable, se recomienda utilizar sitios de 250 m^2 . Asimismo, en el caso de alguna cuantificación del

replado o renuevo, se recomiendan los tamaños de sitio de 100 m², o menor a medida que los tipos de vegetación se hagan más frecuentes dentro del bosque en estudio.

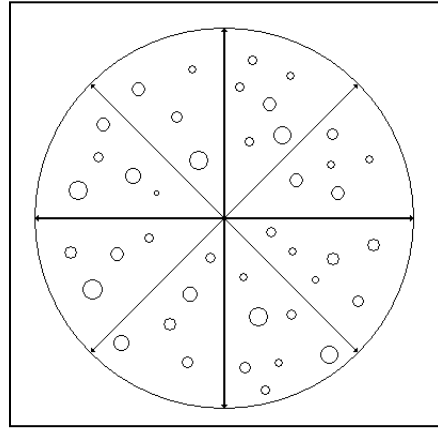


Figura 104. Forma de lanzamiento de radios y estacado en la periferia, en el levantamiento de un sitio circular de muestreo.

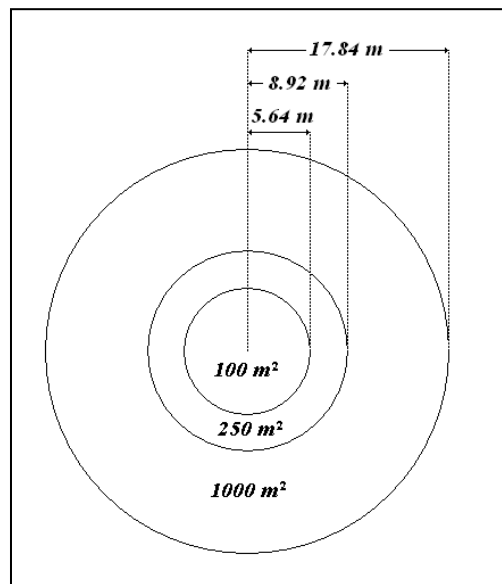


Figura 105. Sitios normales de muestreo en bosques de clima templado y frío.

Tabla 20. Dimensiones de los sitios normales de muestreo empleados en bosques de clima templado y frío.

Círculo	Radio (m)	Superficie (m ²)	Usado para la evaluación de:
Externo	17.84	1,000	Existencias volumétricas
Intermedio	8.92	250	Incorporación
Interior	5.64	100	Renuevo

6.13.1.3 Sitios rectangulares.

Los sitios rectangulares son recomendables principalmente para inventarios en bosques de clima cálido-húmedo, por la gran cantidad de vegetación que se presenta en este tipo de climas y porque levantar o establecer un sitio circular sería muy tardado.

Las dimensiones de los sitios rectangulares pueden ser muy variables. Anteriormente se usaban relativamente poco, dentro de los esquemas de muestreo, porque solían ser muy anchos, situación que, al igual que los sitios cuadrados, originaban múltiples dificultades prácticas e imprecisión en su trazo. Sin embargo, cuando los sitios rectangulares son angostos y constituyen fajas, son muy útiles y fácilmente delimitables. Por ejemplo, una faja de 20 m o menos de ancho puede localizarse y trazarse por su centro e ir midiendo 10 m o menos a ambos lados de la línea de caminamiento para demarcar sus orillas (**Figura 106**). La cuantificación de la incorporación y del renuevo se realiza en sitios rectangulares colaterales, tal como se muestra en la **Figura 107** y en la **Tabla 21**.

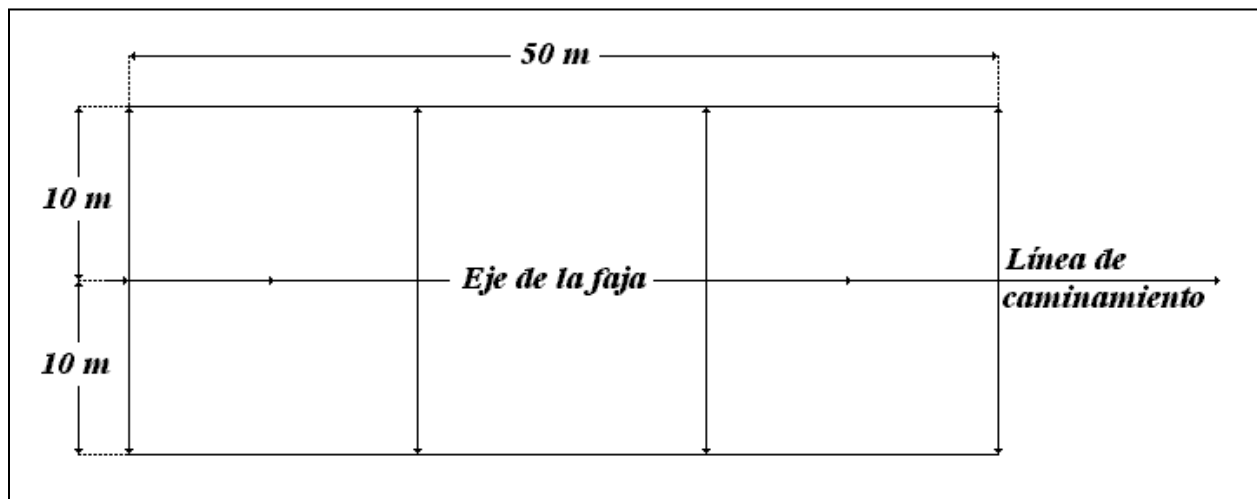


Figura 106. Forma de delimitar un sitio rectangular.

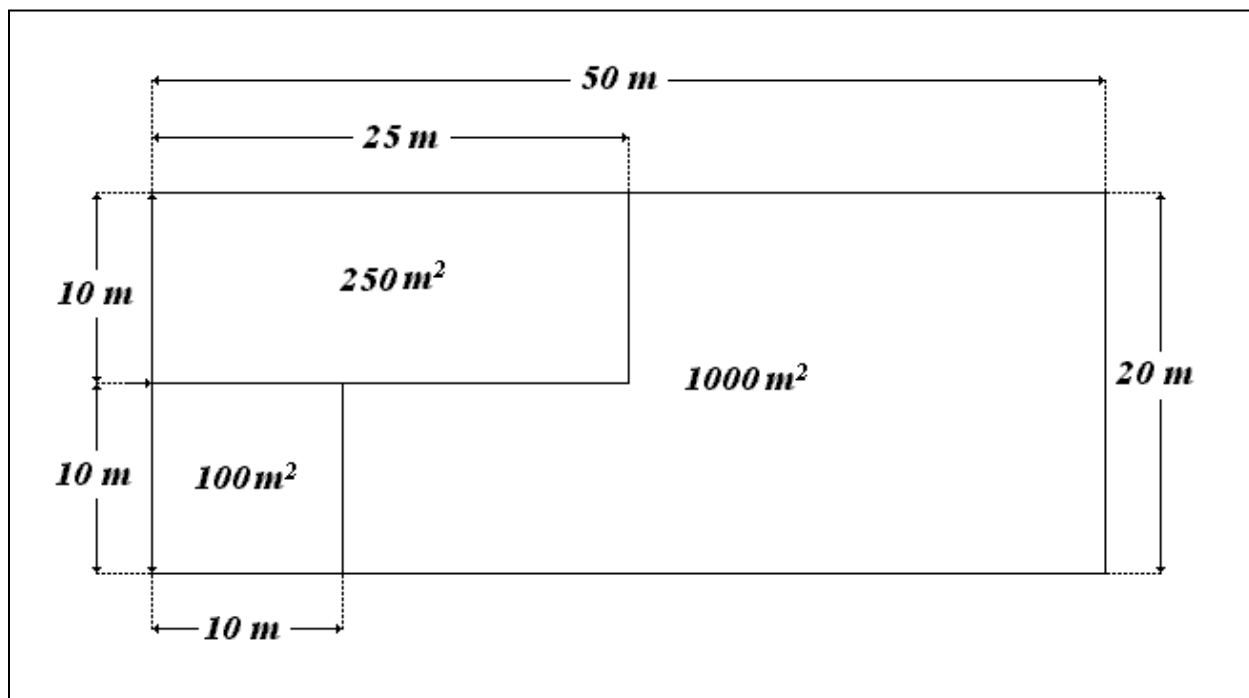


Figura 107. Sitios rectangulares colaterales para bosques de clima cálido húmedo.

Tabla 21. Dimensiones de los sitios rectangulares colaterales de muestreo empleados en bosques de clima cálido húmedo.

Rectángulo	Dimensiones (m)	Superficie (m ²)	Usado para evaluar:
Externo Mayor	20 * 50	1,000	Existencias volumétricas
Intermedio	10 * 25	250	Incorporación
Interior Menor	10 * 10	100	Renuevo

Tanto en el caso de sitios rectangulares aislados como en los circulares no existe la continuidad que se presenta cuando los sitios son rectangulares y constituyen fajas de sitios continuos, es decir, éstos se siguen unos a otros para formar las fajas de longitud variable. Considerando una técnica y una intensidad de muestreo dadas, los sitios rectangulares continuos, desde el punto de vista estadístico, restan eficiencia y precisión a la distribución de la muestra, por producir una concentración de la misma.

En bosques con densidad de vegetación arbórea muy alta y con presencia de gran cantidad de arbustos y hierbas en los estratos vegetativos inferiores, el traslado de un sitio a otro es sumamente lento, ya que existe la necesidad de hacer brechas para seguir los “caminamientos” midiendo distancias. Las experiencias obtenidas en zonas forestales con el tipo de vegetación descrito en las selvas de Quintana Roo y Chiapas, indican que el tiempo empleado en hacer un “caminamiento” para delimitar dos sitios distantes entre sí 250 m, es casi el mismo que el requerido para hacer el inventario de una faja de 20 m de ancho, de las que se emplean en las selvas cálido-húmedas.

En términos generales, podemos decir que los sitios circulares ubicados en forma sistemática o aleatoria se recomiendan para la gran mayoría de los bosques templados y fríos del país, y los sitios rectangulares, aislados o continuos formando fajas, se recomiendan para los bosques de clima cálido-húmedo, siempre que su anchura no sea superior a 20 m. No se recomienda el uso de sitios cuadrados, ni el de los rectangulares muy anchos, así como tampoco se sugiere utilizar sitios con formas irregulares o de figuras geométricas difíciles de delimitar en el terreno.

6.13.1.4 Tamaño de los sitios.

A fin de definir el tamaño que deben tener los sitios de muestreo es necesario determinar primero, por medio de estadística o por referencias, la superficie que debe poseer la muestra.

Para ejemplificar lo anterior diremos que, si se desea cuantificar un bosque de 50,000 ha, habiéndose establecido estadísticamente que se debe muestrear una superficie de 250 ha o sea la aplicación de una intensidad de muestreo de 0.5%. Estas 250 ha de muestra deben obtenerse por cualquiera de las superficies de sitio que se indican en la **Tabla 22**.

Tabla 22. Determinación del número de sitios de muestreo con base en su superficie y en la superficie a muestrear.

Superficie de la muestra (ha).	Superficie de los sitios (ha).	Número de sitios a levantar.
250	1.0	250
250	0.5	500
250	0.1 (1000m²)	2500

Interpretando lo anterior se puede observar que para un mismo tamaño de muestra (250 ha), es posible medirlo a través de muchos tamaños o superficies de sitios, y que a medida que aumentamos la superficie de sitios el número de ellos irá disminuyendo. Aunado a esto, para determinar un tamaño o superficie de sitio es necesario tomar en cuenta también la precisión, costos, recorrido, etcétera.

Prácticamente hablando, entre más pequeño sea un sitio más fácil y precisa será su delimitación. Conforme el tamaño aumenta, su delimitación se va dificultando e imprecisando hasta llegar al caso de que el sitio tenga un tamaño tal que sea completamente impráctico delimitarlo, por constituir su trazo una fuente de errores que puede llegar a ser muy grave.

Cuando se utilizan sitios más grandes, la distribución de la muestra se amplía menos, su eficiencia y precisión también disminuyen, mientras que el número de sitios al reducirse representa menor tiempo de trabajo, aunque los sitios sean mayores, traduciéndose esto en descenso del costo.

Los sitios pequeños son relativamente fáciles de delimitar pero, por el alto número de ellos, es necesario acudir a más lugares para obtener la muestra, repercutiendo en el empleo de más tiempo y por lo tanto de un mayor costo.

6.13.2 Distribución de los Sitios de Muestreo.

La distribución de los sitios de muestreo en un diseño de muestreo puede ser de varias maneras, teniendo en cuenta aspectos estadísticos principalmente.

Es común, al consultar otros textos relacionados con el tema, encontrar que para referirse a la distribución de los sitios, lo consignan como **tipo de muestreo**.

6.13.2.1 Distribución no probabilística.

En este tipo de distribución no interviene el azar. Algunos ejemplos de tipos de muestreo no probabilísticos se dan en el caso de las distribuciones selectivas y sistemáticas o muestreos selectivos y muestreos sistemáticos.

a) Muestreo selectivo.

En este tipo de muestreo o distribución de los sitios tiene principal actuación el seleccionador en la definición de los lugares donde han de establecerse los sitios de muestreo.

Por ejemplo, si se elige la parcela o sitio de muestreo, de tal manera que su composición sea lo más parecida o aproximada a la media del monte, se habrá escogido una *muestra opinática*. Si la población es muy homogénea o el criterio de selección muy acertado se habrá podido obtener un valor de la población total muy aproximado al verdadero. Pero esto puede no ocurrir y entonces se presenta el inconveniente de que el error de muestreo, o sea la diferencia entre el valor real de la población y el estimado por el procedimiento señalado, no se sujeta a las leyes de la estadística y por consiguiente se está ante la imposibilidad de poder acotar dicho error entre los límites determinados.

Por estas razones este tipo de muestreo no se utiliza en trabajos de precisión, investigación o cualquier trabajo de inventario que requiere objetividad impersonal en los resultados.

Para ejemplificar y hacer una comparación de resultados entre censo y tipos de muestreo, a continuación se presenta un ejemplo de censo en una población forestal (Tablas 23 y 24).

Cálculos de los parámetros poblacionales.

Datos:

$$N = 156 \text{ sitios} \qquad \sum y_i = 5,590 \text{ m}^3 \qquad Ev_i^2 = 270,990$$

Media:

$$\mu = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{5,590}{156} = 35.83 \text{ m}^3$$

Tabla 23. Censo de una población forestal.

		C o l u m n a s												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
H i l e r a s	1	34	28	27	59	72	52	25	18	35	23	21	22	14
	2	39	41	0	32	22	37	44	20	32	32	35	20	22
	3	27	63	46	40	33	56	43	24	47	6	31	25	45
	4	48	29	25	59	42	91	40	45	31	17	12	14	14
	5	30	60	26	60	65	19	31	21	38	23	44	13	3
	6	20	83	147	50	44	10	57	32	38	29	15	41	32

Tabla 23. Censo de una población forestal.

C o l u m n a s														
7	71	27	52	79	36	22	86	49	92	37	35	51	17	
8	32	26	62	31	22	73	18	29	14	20	41	9	26	
9	35	88	49	35	70	16	41	19	28	15	29	43	10	
10	54	63	45	23	36	50	14	19	26	66	11	14	30	
11	7	15	25	47	47	75	60	38	30	35	18	27	27	
12	5	6	57	52	59	24	20	13	28	18	2	39	40	

Tabla 24. Tabulación de datos del censo de una población forestal.

Sitio	Col	Hilera	Vol. (v)	v ²	Sitio	Col	Hilera	Vol. (v)	v ²	Sitio	Col	Hilera	Vol. (v)	v ²	Sitio	Col	Hilera	Vol. (v)	v ²
1	1	1	34	1156	41	4	5	60	3600	81	7	9	41	1681	121	11	1	21	441
2	1	2	39	1521	42	4	6	50	2500	82	7	10	14	196	122	11	2	35	1225
3	1	3	27	729	43	4	7	79	6241	83	7	11	60	3600	123	11	3	31	961
4	1	4	48	2304	44	4	8	31	961	84	7	12	20	400	124	11	4	12	144
5	1	5	30	900	45	4	9	35	1225	85	8	1	18	324	125	11	5	44	1936
6	1	6	20	400	46	4	10	23	529	86	8	2	20	400	126	11	6	15	225
7	1	7	71	5041	47	4	11	47	2209	87	8	3	24	576	127	11	7	35	1225
8	1	8	32	1024	48	4	12	52	2704	88	8	4	45	2025	128	11	8	41	1681
9	1	9	35	1225	49	5	1	72	5184	89	8	5	21	441	129	11	9	29	841
10	1	10	54	2916	50	5	2	22	484	90	8	6	32	1024	130	11	10	11	121
11	1	11	7	49	51	5	3	33	1089	91	8	7	49	2401	131	11	11	18	324
12	1	12	5	25	52	5	4	42	1764	92	8	8	29	841	132	11	12	2	4
13	2	1	28	784	53	5	5	65	4225	93	8	9	19	361	133	12	1	22	484
14	2	2	41	1681	54	5	6	44	1936	94	8	10	19	361	134	12	2	20	400
15	2	3	63	3969	55	5	7	36	1296	95	8	11	38	1444	135	12	3	25	625
16	2	4	29	841	56	5	8	22	484	96	8	12	13	169	136	12	4	14	196
17	2	5	60	3600	57	5	9	70	4900	97	9	1	35	1225	137	12	5	13	169
18	2	6	83	6889	58	5	10	36	1296	98	9	2	32	1024	138	12	6	41	1681
19	2	7	27	729	59	5	11	47	2209	99	9	3	47	2209	139	12	7	51	2601
20	2	8	26	676	60	5	12	59	3481	100	9	4	31	961	140	12	8	9	81
21	2	9	88	7744	61	6	1	52	2704	101	9	5	38	1444	141	12	9	43	1849
22	2	10	63	3969	62	6	2	37	1369	102	9	6	38	1444	142	12	10	14	196
23	2	11	15	225	63	6	3	56	3136	103	9	7	92	8464	143	12	11	27	729
24	2	12	6	36	64	6	4	91	8281	104	9	8	14	196	144	12	12	39	1521
25	3	1	27	729	65	6	5	19	361	105	9	9	28	784	145	13	1	14	196
26	3	2	0	0	66	6	6	10	100	106	9	10	26	676	146	13	2	22	484
27	3	3	46	2116	67	6	7	22	484	107	9	11	30	900	147	13	3	45	2025
28	3	4	25	625	68	6	8	73	5329	108	9	12	28	784	148	13	4	14	196
29	3	5	26	676	69	6	9	16	256	109	10	1	23	529	149	13	5	3	9
30	3	6	147	21609	70	6	10	50	2500	110	10	2	32	1024	150	13	6	32	1024
31	3	7	52	2704	71	6	11	75	5625	111	10	3	6	36	151	13	7	17	289

Tabla 24. Tabulación de datos del censo de una población forestal.

Sitio	Col	Hilera	Vol. (v)	v ²	Sitio	Col	Hilera	Vol. (v)	v ²	Sitio	Col	Hilera	Vol. (v)	v ²	Sitio	Col	Hilera	Vol. (v)	v ²
32	3	8	62	3844	72	6	12	24	576	112	10	4	17	289	152	13	8	26	676
33	3	9	49	2401	73	7	1	25	625	113	10	5	23	529	153	13	9	10	100
34	3	10	45	2025	74	7	2	44	1936	114	10	6	29	841	154	13	10	30	900
35	3	11	25	625	75	7	3	43	1849	115	10	7	37	1369	155	13	11	27	729
36	3	12	57	3249	76	7	4	40	1600	116	10	8	20	400	156	13	12	40	1600
37	4	1	59	3481	77	7	5	31	961	117	10	9	15	225	N = 156				
38	4	2	32	1024	78	7	6	57	3249	118	10	10	66	4356	Σv_i = 5590				
39	4	3	40	1600	79	7	7	86	7396	119	10	11	35	1225	Σv_i² = 270,990				
40	4	4	59	3481	80	7	8	18	324	120	10	12	18	324					

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N v_i\right)^2}{N}}{N - 1} = \frac{270,990 - \frac{(5,590)^2}{156}}{155}$$

$$\sigma^2 = \frac{270,990 - \frac{31,248,100}{156}}{155} = \frac{270,913 - 200,308.33}{155}$$

$$\sigma^2 = \frac{70,604.66}{155} = 455.51$$

Desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{455.51} = \pm 21.342 \text{ m}^3/\text{sitio}$$

Error estándar:

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{\sigma^2}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{455.51}{156} \left(1 - \frac{156}{156}\right)}$$

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{455.51}{156} (1-1)} = \sqrt{\frac{455.98}{156} (0)} = 0$$

Error de muestreo:

$$E = \sigma_v * t = (0) * (1.960) = 0; \quad t_{0.05, 155 GL} = 1.960$$

Error en %:

$$E_{\%} = \frac{\sigma_v * t}{\mu} * 100 = \frac{0}{35.83} * 100 = \frac{0}{35.83} = 0$$

b) Muestreo sistemático.

Un sistema de muestreo ampliamente usado en México es el muestreo sistemático, que no es probabilístico pero permite una distribución uniforme de la muestra en toda la superficie, o sea que es más representativo que el anterior. Consiste en trazar sobre el plano del terreno una retícula que entre sus líneas en un sentido es equidistante y también es equidistante entre las líneas en el sentido transversal, aun cuando una y otra equidistancias pueden ser diferentes. Cada vértice de la retícula será la ubicación del centro de cada sitio y las equidistancias deben determinarse de tal modo que se tengan tantos vértices como sitios se requieren en la muestra, tal como lo ilustra la **Figura 108**.

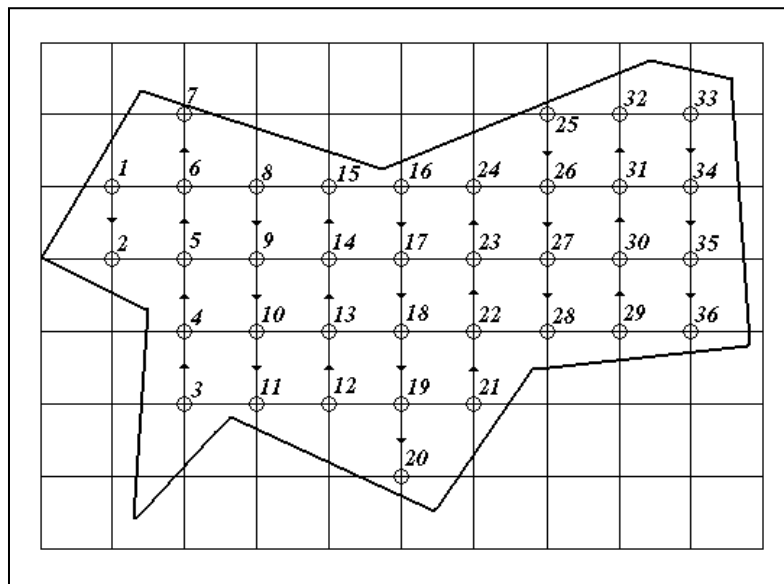


Figura 108. Distribución de la muestra (36 sitios) bajo un patrón sistemático.

La equidistancia entre líneas puede ser prefijada, y puede ser de 100 m, 250 m, 500 m, 1 km, etcétera, dependiendo de tamaño de muestra n y de la superficie a cubrir.

Otra forma de distribuir la muestra en un área conocida consiste en prefijar la equidistancia entre líneas, conociendo la escala del mapa donde se haga el rayado. Una vez trazadas las líneas en el mapa se obtiene la suma de sus longitudes, dividiendo esta cantidad entre el número de muestras a distribuir obtendremos la equidistancia entre los sitios de muestreo, tal como lo ilustra la **Figura 109**.

Superficie = 10,000 ha.

Número de sitios = 500.

Longitud de líneas 50,000 m.

Equidistancia entre sitios = Longitud de líneas/Número de sitios.

Equidistancia entre líneas = 100 m.

Equidistancia entre sitios = 100 m.

En este tipo de muestreo el problema principal es la determinación del tamaño de muestra, por no ser probabilístico; esto se puede solucionar conociendo el total del área por inventariar y prefijándose una intensidad de muestreo, con lo cual se podrá determinar el área o superficie a muestrear, que dividida entre la superficie de cada sitio nos dará el número de sitios por levantar.

Suponiendo que tenemos una superficie de 10,000 ha por inventariar y queremos aplicar una intensidad de muestreo del 1%; el 1% de 10,000 ha son 100 ha que serían las que tendríamos que muestrear. Si tenemos que la superficie del sitio es de 0.1 ha, tendremos que levantar 1000 sitios.

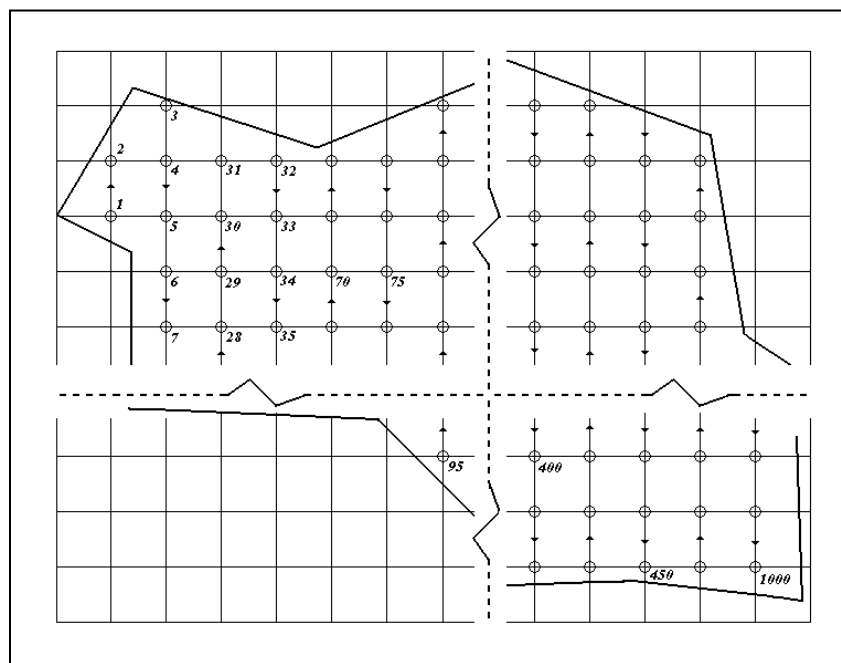


Figura 109. Representación gráfica de la distribución sistemática en superficie conocida y equidistancias fijas y obligadas entre líneas y sitios.

Ejemplo de inventario mediante muestreo sistemático.

Si tomamos un sitio de cada cinco de una población previamente dividida en 156 sitios a la cual ya se le efectuó un censo, seleccionaremos los marcados en la **Tabla 25**. En la **Tabla 26** se indican los volúmenes obtenidos en ese mismo muestreo.

Tabla 25. Volúmenes de los sitios obtenidos con un muestreo sistemático de una población.

		C o l u m n a s												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Hileras	1	34	28	27	59	72	52	25	18	35	23	21	22	14
	2	39	41	0	32	22	37	44	20	32	32	35	20	22
	3	27	63	46	40	33	56	43	24	47	6	31	25	45
	4	48	29	25	59	42	91	40	45	31	17	12	14	14
	5	30	60	26	60	65	19	31	21	38	23	44	13	3
	6	20	83	147	50	44	10	57	32	38	29	15	41	32
	7	71	27	52	79	36	22	86	49	92	37	35	51	17
	8	32	26	62	31	22	73	18	29	14	20	41	9	26

	9	35	88	49	35	70	16	41	19	28	15	29	43	10
	10	54	63	45	23	36	50	14	19	26	66	11	14	30
	11	7	15	25	47	47	75	60	38	30	35	18	27	27
	12	5	6	57	52	59	24	20	13	28	18	2	39	40

Tabla 26. Tabulación de datos obtenidos en muestreo sistemático.

Unidad	Núm. de sitio	Volumen		Unidad	Núm. de sitio	Volumen	
		v	v^2			v	v^2
1	5	30	900	17	85	18	324
2	10	54	2916	18	90	32	1024
3	15	63	3969	19	95	38	1444
4	20	26	676	20	100	31	961
5	25	27	729	21	105	28	784
6	30	147	21609	22	110	32	1024
7	35	25	625	23	115	37	1369
8	40	59	3481	24	120	18	324
9	45	35	1225	25	125	44	1936
10	50	22	484	26	130	11	121
11	55	36	1296	27	135	25	625
12	60	59	3481	28	140	9	81
13	65	19	361	29	145	14	196
14	70	50	2500	30	150	32	1024
15	75	43	1849	31	155	27	729
16	80	18	324	n = 31			
				$\Sigma v_i = 1,109$			
				$\Sigma v_i^2 = 58,391$			

Cálculos:

Datos: $N = 156$ $n = 31$ $\Sigma v_i = 1,109$ $\Sigma v_i^2 = 58,391$

Media:

$$\bar{v} = \frac{1,109}{31} = 35.77$$

Varianza:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N v_i\right)^2}{n}}{n - 1}$$

$$s^2 = \frac{\left(58,391 - \frac{1,109^2}{31}\right)}{30} = \frac{\left(58,391 - \frac{1,229,881}{31}\right)}{30}$$

$$s^2 = \frac{(58,391 - 39,673.5806)}{30} = \frac{18,717.4194}{30}$$

$$s^2 = 623.91398$$

Desviación estándar:

$$s = \sqrt{s^2} \quad s = \sqrt{623.91398} = 24.9782$$

Error estándar:

$$s_{\bar{v}} = \sqrt{\frac{s^2}{n} * \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{623.91398}{31} * \left(1 - \frac{31}{156}\right)} = \pm 4.0158 m^3$$

Error de muestreo:

$$E = s_{\bar{v}} * t = 4.0158 * 2.042 \quad E = 8.2003 m^3$$

El valor de “t” se tomó de la tabla de “t” de Student, para 30 G.L. y un 95% de probabilidad.

$$\text{Error en \%: } E\% = \frac{s_v \cdot t \cdot 100}{\bar{v}} = \frac{8.2003 \cdot 100}{35.77} = 22.93\%$$



Resultados e interpretación:

Los resultados obtenidos en el inventario anterior son:

Volumen por sitio	$\bar{v} = 35.77 \text{ m}^3$
Error de muestreo	$E = \pm 8.2003 \text{ m}^3$
Error de muestreo %	$E\% = \pm 22.93\%$
Promedio estimado de la población	$\left[\begin{array}{l} 35.77 \pm 8.20 \text{ m}^3/\text{sitio} \\ 35.77 \pm 22.93\% \end{array} \right.$
Volumen total:	$\left[\begin{array}{l} V_t = (35.77 \cdot 156) \pm 22.93\% \\ V_t = 5,580.12 \pm 1279.52 \text{ m}^3 \end{array} \right.$

Esto nos quiere decir que el volumen real por sitio de la población debe estar entre $35.77 - 8.20 = 27.57 \text{ m}^3$ y $35.77 + 8.20 = 43.97 \text{ m}^3$ que son valores estimados mediante el muestreo.

En el muestreo sistemático y selectivo, como lo vimos anteriormente, puede tratarse un área por inventariar como un todo y tratarse por partes o divisiones del mismo bosque, esto es rodalizando o estratificando ese bosque. De tal manera que un muestreo sistemático puede ser:

-  **Sistemático no estratificado.** En este muestreo se toma o se distribuye la muestra tomando al bosque completo o sea considerando toda al área.
-  **Sistemático estratificado.** Dentro de esta forma se toma al bosque subdividido y distribuyendo la muestra en cada subdivisión, existiendo dos formas para ello:
 - a) **Pre-estratificado.** Consiste en estratificar o subdividir primero y después distribuir la muestra por cada estrato.
 - b) **Post-estratificado.** Consiste en primero distribuir la muestra y posteriormente estratificar o subdividir.

6.13.2.2 Distribución probabilística.

En este tipo de distribución el criterio humano no influye en la selección de la ubicación de los sitios sino que ésta se hace por procedimientos estadísticos, y aplicando netamente la teoría del muestreo.

Dentro de este tipo de distribución, como ejemplo, tenemos las siguientes metodologías de distribución, aunque existen otras:

- ⚡ Muestreo simple al azar o aleatorio.
- ⚡ Muestreo aleatorio con sitios de dimensiones variables.
- ⚡ Muestreo multietápico o por conglomerados.

a) Muestreo aleatorio.

El muestreo simple al azar es el método fundamental de selección y todos los otros procedimientos de muestreo probabilístico son realmente modificaciones que pretenden lograr mayor economía o precisión. El muestreo simple al azar requiere que todas las posibles combinaciones de las n (tamaño de muestra) unidades muestrales tengan una probabilidad igual de ser elegidas entre la población de N (tamaño de la población).

La elección de una unidad muestral debe estar libre de toda predisposición y debe ser totalmente independiente de la elección de las otras unidades.

El inventario forestal con muestreo al azar requiere de fotografías aéreas o mapas para establecer el marco del cual se pueda elegir la muestra aleatoriamente. Cuando se van a emplear unidades muestrales (sitios) de área fija de forma rectangular es posible dividir el área en un número de sitios de esa forma con el tamaño establecido que incluyan a toda la superficie, posteriormente sólo se requiere que por cualquier procedimiento al azar se elijan las unidades que se incluirán en la muestra.

En el caso que se vayan a utilizar sitios circulares es posible ubicar el plano del predio en un sistema de coordenadas haciendo que la separación entre cada punto de los ejes sea igual a dos veces el radio de los círculos a emplear, y los vértices de estos puntos en los ejes indican la ubicación del centro de un sitio. Posteriormente habrá que ir eligiendo al azar pares de números que representarían las coordenadas de los sitios elegidos. Estos pares de números se pueden encontrar

en una tabla de números aleatorios o haciendo papelitos (todos los posibles de acuerdo a las escalas en las coordenadas), e irlos sacando aleatoriamente.

Otro procedimiento consiste en construir una cuadrícula de puntos, cuya equidistancia sea, a escala, el doble del radio de los círculos que se usarán; esta cuadrícula debe ser al menos del mismo tamaño que el área a inventariar, y siguiendo el mismo procedimiento de elección al azar encontraremos los valores de cada vértice, hasta completar el número de sitios.

Un problema que persiste después de analizado este tipo de distribución es el cálculo del número de unidades muestrales (sitios) que deben ser incluidos. Para este aspecto, en el apartado respectivo a tamaño de muestra se explican y exponen una serie de fórmulas para tal efecto, dependiendo de las condiciones del bosque, precisión, parámetros de interés, etc.

Ejemplo de inventario a base de muestreo aleatorio.

Utilizando la misma población que en el ejemplo de inventario a base de muestreo sistemático, se muestreará mediante la técnica de muestreo aleatorio. Al final de este capítulo se hará un resumen comparativo entre los dos métodos y el censo de esa población.

Objetivos.

Se trata de tomar una muestra para saber el volumen por hectárea y el volumen total del bosque o población, cuyos volúmenes se consignan en la **Tabla 27**. Se asume que no se conocen los valores numéricos de los parámetros, que son de interés, y que se van a estimar mediante un muestreo al azar.

En este inventario se tratará de estimar el volumen por sitio con un error o precisión de $\pm 20\%$.

Tamaño de muestra: ¿Cuántos lotes o unidades muestrales se deben medir al azar para obtener la precisión requerida?

Como el error propuesto ($E = \pm 20\%$), está dado en por ciento, en el cálculo de n debe usarse la fórmula con el coeficiente de variación CV (ver apartado de tamaño de muestra).

$$n = \frac{t^2 CV^2}{E^2 + \frac{t^2 CV^2}{N}}$$

Tabla 27. Ubicación de diez sitios de premuestra en distribución aleatoria.

		<i>C o l u m n a s</i>												
		<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>
<i>H i l e r a s</i>	<i>1</i>	34	28	27	59	72	52	25	18	35	23	21	22	14
	<i>2</i>	39	41	0	32	22	37	44	20	32	32	35	20	22
	<i>3</i>	27	63	46	40	33	56	43	24	47	6	31	25	45
	<i>4</i>	48	29	25	59	42	91	40	45	31	17	12	14	14
	<i>5</i>	30	60	26	60	65	19	31	21	38	23	44	13	3
	<i>6</i>	20	83	147	50	44	10	57	32	38	29	15	41	32
	<i>7</i>	71	27	52	79	36	22	86	49	92	37	35	51	17
	<i>8</i>	32	26	62	31	22	73	18	29	14	20	41	9	26
	<i>9</i>	35	88	49	35	70	16	41	19	28	15	29	43	10
	<i>10</i>	54	63	45	23	36	50	14	19	26	66	11	14	30
	<i>11</i>	7	15	25	47	47	75	60	38	30	35	18	27	27
	<i>12</i>	5	6	57	52	59	24	20	13	28	18	2	39	40

Para calcular n en este caso, como en todo el inventario los valores conocidos son:

$$E = \pm 20\%$$

t = de las tablas de t de Student; generalmente se usa un α de 0.05 , para tener un 95% de confiabilidad.

N = Número total de unidades de la población (156 sitios).

Solamente faltaría conocer el coeficiente de variación (CV) para aplicar la fórmula. Para esto se realiza un muestreo piloto o premuestreo, y así conocer una medida de la variabilidad, el CV . Con los valores de los 10 sitios al azar se efectuarán los primeros cálculos.

La tabulación y cálculo con los valores de los 10 sitios escogidos al azar se consignan en la **Tabla 28**.

Tabla 28. Tabulación de datos del preuestreo.

Unidades	Columna	Hilera	Volumen v	v^2
1	5	10	36	1296
2	11	10	11	121
3	1	2	39	1521
4	3	2	0	0
5	9	6	38	1444
6	7	1	25	625
7	2	10	63	3969
8	1	8	32	1024
9	13	2	22	488
10	4	9	35	1225
			301	11709

Volumen total de la muestra. $\sum_{i=1}^n v_i = 301m^3$

Promedio $\bar{v} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{n} = 30.1 m^3 / \text{sitio}$

Suma de cuadrados de $v = \sum_{i=1}^n v_i^2 = 11,709$.

Cálculo de la varianza:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n v_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{11,709 - \frac{(301)^2}{10}}{9} = \frac{11,709 - 9,060.10}{9} = 294.32$$

La desviación estándar: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{294.32} = 17.15$

El coeficiente de variación: $CV = \frac{s}{\bar{v}} 100 = \frac{17.15 \times 100}{30.1} = 56.8 = 57 \%$

Con el valor del coeficiente de variación (*CV*) se puede aplicar ya la fórmula para *n*. El valor de *t* se tomará para 9 grados de libertad y 95% de probabilidad.

$$n = \frac{t^2 CV^2}{(E\%)^2 + \frac{t^2 CV^2}{N}} = \frac{2.262^2 * 57^2}{20^2 + \frac{2.262^2 * 57^2}{156}}$$

$$n = \frac{5.1166 * 3249}{400 + \frac{16,623.83}{156}} = \frac{16,623.83}{400 + 106.563} = \frac{16,623.83}{506.563} = 32.81 \approx 33$$

Teniendo ya el valor de *n* que nos dice que debemos tomar una muestra de 33 sitios de la población, para poder obtener la estimación del volumen por hectárea y el volumen total de esa población, se procede a ello.

Como ya escogimos 10 sitios en el premuestreo, ahora tomamos y registramos en el cuadro los 23 restantes también elegidos al azar (**Tablas 29 y 30**).

Tabla 29. Ubicación de treinta y tres sitios de muestreo en distribución aleatoria.

		C o l u m n a s												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
H i l e r a s	1	34	28	27	59	72	52	25	18	35	23	21	22	14
	2	39	41	0	32	22	37	44	20	32	32	35	20	22
	3	27	63	46	40	33	56	43	24	47	6	31	25	45
	4	48	29	25	59	42	91	40	45	31	17	12	14	14
	5	30	60	26	60	65	19	31	21	38	23	44	13	3
	6	20	83	147	50	44	10	57	32	38	29	15	41	32
	7	71	27	52	79	36	22	86	49	92	37	35	51	17
	8	32	26	62	31	22	73	18	29	14	20	41	9	26
	9	35	88	49	35	70	16	41	19	28	15	29	43	10
	10	54	63	45	23	36	50	14	19	26	66	11	14	30
	11	7	15	25	47	47	75	60	38	30	35	18	27	27
	12	5	6	57	52	59	24	20	13	28	18	2	39	40

Tabla 30. Tabulación de volúmenes de 33 sitios de muestreo en distribución aleatoria.

Unidad	Columna	Hilera	Volumen	
			v	v^2
1	5	10	36	1296
2	11	10	11	121
3	1	2	39	1521
4	3	2	0	0
5	9	6	38	1444
6	7	1	25	625
7	2	10	63	3969
8	1	8	32	1024
9	13	2	22	484
10	4	9	35	1225
11	1	3	27	729
12	6	6	10	100
13	4	6	50	2500
14	6	5	19	361
15	5	3	33	1089
16	11	5	44	1936
17	3	10	45	2025
18	7	8	18	324
19	9	1	35	1225
20	1	6	20	400
21	7	5	31	961
22	1	12	5	25
23	3	5	26	676
24	2	4	29	841
25	7	2	44	1936
26	10	8	20	400
27	13	3	45	2025
28	10	12	18	324
29	13	5	3	9
30	8	2	20	400
31	12	11	27	729

Tabla 30. Tabulación de volúmenes de 33 sitios de muestreo en distribución aleatoria.

Unidad	Columna	Hilera	Volumen	
			v	v^2
32	6	3	56	3136
33	11	4	12	144
			938	34004

Cálculos.

Promedio: $\bar{v} = \frac{v}{n} = \frac{938}{33} = 28.42$

Varianza:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n v_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{34,004 - \frac{(938)^2}{33}}{32} = \frac{34,004 - 26,661.9394}{32}$$

$$s^2 = \frac{7342.06}{32} = 229.4394$$

Desviación estándar: $s = 15.147$

Error estándar: $s_{\bar{v}} = \sqrt{\left(\frac{s^2}{n}\right) * \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\left(\frac{229.4394}{33}\right) * \left(1 - \frac{33}{156}\right)}$

$$s_{\bar{v}} = \sqrt{\left(\frac{229.44}{33}\right) * \left(1 - \frac{33}{156}\right)} = \sqrt{(6.9527) * (0.7884)} = \sqrt{5.4819} = 2.3413$$

(Se incluye el factor de corrección)

Error de muestreo: $E = s_{\bar{v}} * t = (2.3413)(2.06) = 4.82$

El valor de t fue para $n-1$ GL (32) y un 95% de probabilidad.

Error en porcentaje: $E\% = \frac{s_{\bar{v}} * t}{\bar{v}} 100 = \frac{4.82}{28.42} 100 = 16.96 \approx 17\%$

Exactitud: $\bar{v} - \mu = 28.42 - 35.82 = -7.40 \text{ m}^3$ (Partiendo de que conocemos el valor de μ o media poblacional, que solamente se puede lograr mediante el censo).

Resultados e interpretación del ejemplo.

Los resultados obtenidos para estimar el volumen/sitio y el volumen total de la población son:

Volumen por sitio $= 28.42 \pm 4.82 \text{ m}^3/\text{sitio}$
 Volumen total $= (28.42 \pm 4.82) (156) = 4433.52 \pm 752$
 Error del muestreo o precisión del muestreo $= \pm 17\%$

Se trataba de estimar el promedio μ de la población, en la cual $\mu = 35.82 \text{ m}^3/\text{sitio}$ (calculado mediante censo) y se obtuvo con la muestra de 33 lotes, $\bar{v} = 28.42 \text{ m}^3/\text{sitio}$

Error de estimación $= \bar{v} - \mu = 28.42 - 35.82 = -7.40 \text{ m}^3$

El objetivo era estimar la μ en la siguiente forma: $\mu = \bar{v} \pm E$ (con un 95% de probabilidad); $E = \pm s_{\bar{v}} * t$ (se tomo $t = 0.05$ para obtener el 95% de probabilidad).

Luego: $\pm s_{\bar{v}} * t = \bar{v} - \mu$, con un 95% de probabilidad, lo que indica que el error de estimación debe encontrarse entre $+s_{\bar{v}} * t$ y $-s_{\bar{v}} * t$.

Sin embargo, en este caso se ve que -7.40 no se encuentra entre ± 4.82 ; esto se debe a que había un 5% de probabilidad de que esto ocurra (95% de probabilidad de que se encuentre dentro de $\pm s_{\bar{v}} * t$ y 5% de probabilidad de que se encuentre fuera).

E debía ser igual a $\pm 20\%$ con un 95% de probabilidad; por lo tanto había un 5% de probabilidad de que μ estuviese fuera de los límites dados por $\bar{v} \pm E$.

El error obtenido con la muestra fue $\pm 4.77 = \pm 17\%$, por lo tanto $\mu = 28.42 \pm 17\%$ de tal forma que los límites dados por $\bar{v} \pm E$ serán:

$$L_1 = 28.42 + 4.82 = 33.26$$

$$L_2 = 28.42 - 4.82 = 23.60$$

El promedio de la población $\mu = 35.82$, está fuera de estos límites. Este sería un caso (uno en 20 o sea 5%) de que el valor de μ se encuentre fuera de $\bar{v} \pm (s_{\bar{v}} * t)$.

A continuación se expone un resumen comparativo de los resultados obtenidos en cada tipo de muestreo (**Tabla 31**).

Tabla 31. Resumen comparativo de diferentes tipos de muestreo.

Tipo de inventario	Media	Varianza	Desviación estándar	Error estándar	Precisión o error de muestreo	Error en por ciento
Censo	35.83	455.98	21.35	0.0	0.0	0.0
Sistemático	35.77	623.91	24.97	4.015	8.20	22.9
Aleatorio	28.42	229.44	15.15	2.34	4.82	17.0

Análisis e interpretación de resultados:

Partiendo del conocimiento de los valores de los parámetros en el curso tenemos que:

$$\mu = 35.83$$

$$\sigma^2 = 455.98$$

$$\sigma = 21.35$$

$$\text{Error estándar} = 0$$

$$\text{Error de muestreo} = 0$$

$$\text{Error en \%} = 0$$

En el muestreo sistemático tuvimos:

El error de estimación o exactitud $\bar{v} - \mu = 35.77 - 35.83 = 0.06 m^3$

El promedio de la población $\mu = 35.83$ está muy cerca de \bar{v}

La estimación de la varianza $s^2 = 623.91$ está alejada de la varianza poblacional.

En el muestreo aleatorio, de la misma manera que en el anterior muestreo tenemos que:

El error de estimación o exactitud $\bar{v} - \mu = 28.42 - 35.83 = -7.41 \text{ m}^3$

El promedio de la población $\mu = 35.83$ está muy alejado de \bar{v}

La estimación de la varianza $s^2 = 229.44$ está muy por debajo de la varianza poblacional.

Con lo anteriormente expuesto se podría construir el **Tabla 32**.

Tabla 32. Comparación de resultados entre censo y muestreo sistemático y aleatorio.

Método	Tamaño de Muestra	Promedio	(Precisión) Error de Muestreo	(Exactitud) Error de Estimación
Lotes al azar	$n = 33$	$\bar{v} = 28.42$	17.0%	-7.40 m^3
Lotes sistemáticos	$n = 31$	$\bar{v} = 35.77$	22.9%	-0.05 m^3
Censo	$n = 156$	$\mu = 35.83$	0.0	0.00

Se puede decir que de los dos métodos, el de lotes al azar fue más preciso pero menos exacto que el sistemático.

7 Anexos

Anexo 1. Tabla de cubicación de madera aserrada en pies tabla.

Tabla de cubicación de madera aserrada. Volumen en pies tabla sin refuerzo.

Grueso y ancho en pulgadas	Longitud en pies						
	4'	6'	8'	10'	12'	14'	16'
1/4" * 4"	0.333	0.500	0.666	0.833	1.000	1.666	1.333
1/4" * 6"	0.500	0.750	1.000	1.250	1.500	1.750	2.000
1/4" * 8"	0.666	1.000	1.333	1.666	2.000	2.333	2.666
1/4" * 10"	0.833	1.250	1.666	2.083	2.500	2.917	3.333
1/4" * 12"	1.000	1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000
1/2" * 4"	0.666	1.000	1.333	1.666	2.000	2.333	2.666
1/2" * 6"	1.000	1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000
1/2" * 8"	1.333	2.000	2.666	3.333	4.000	4.666	5.333
1/2" * 10"	1.666	2.500	3.333	4.166	5.000	5.833	6.666
1/2" * 12"	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000
3/4" * 4"	1.000	1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000
3/4" * 6"	1.500	2.250	3.000	3.750	4.500	5.250	6.000
3/4" * 8"	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000
3/4" * 10"	2.500	3.750	5.000	6.250	7.500	8.750	10.000
3/4" * 12"	3.000	4.500	6.000	7.500	9.000	10.500	12.000
1" * 4"	1.333	2.000	2.666	3.333	4.000	4.666	5.333
1" * 6"	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000
1" * 8"	2.666	4.000	5.333	6.666	8.000	9.333	10.666
1" * 10"	3.333	5.000	6.666	8.333	10.000	11.666	13.333
1" * 12"	4.000	6.000	8.000	10.000	12.000	14.000	16.000
1 1/4" * 4"	1.666	2.500	3.333	4.166	5.000	5.833	6.666
1 1/4" * 6"	2.500	3.750	5.000	6.250	7.500	8.750	10.000
1 1/4" * 8"	3.333	5.000	6.666	8.333	10.000	11.666	13.333
1 1/4" * 10"	4.166	6.250	8.333	10.416	12.500	14.583	16.666
1 1/4" * 12"	5.000	7.500	10.000	12.500	15.000	17.500	20.000
1 1/2" * 4"	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000
1 1/2" * 6"	3.000	4.500	6.000	7.500	9.000	10.500	12.000
1 1/2" * 8"	4.000	6.000	8.000	10.000	12.000	14.000	16.000

Tabla de cubicación de madera aserrada. Volumen en pies tabla sin refuerzo.

Grueso y ancho en pulgadas	Longitud en pies						
	4'	6'	8'	10'	12'	14'	16'
11/2" * 10"	5.000	7.500	10.000	12.500	15.000	17.500	20.000
11/2" * "12	6.000	9.000	12.000	15.000	18.000	21.000	24.000
13/4" * 4"	2.333	3.500	4.666	5.833	7.000	8.166	9.333
13/4" * 6"	3.500	5.250	7.000	8.750	10.500	12.250	14.000
13/4" * 8"	4.666	7.000	9.333	11.666	14.000	16.333	18.666
13/4" * 10"	5.833	8.750	11.666	14.583	17.500	20.417	23.333
13/4" * 12"	7.000	10.500	14.000	17.500	21.000	24.500	28.000
2" * 4"	2.666	4.000	5.333	6.666	8.000	9.333	10.666
2" * 6"	4.000	6.000	8.000	10.000	12.000	14.000	16.000
2" * 8"	5.333	8.000	10.666	13.333	6.000	18.666	21.333
2" * 10"	6.666	10.000	13.333	16.666	20.000	23.333	26.666
2" * 12"	8.000	12.000	16.000	20.000	24.000	28.000	32.000
21/4" * 4"	3.000	4.500	6.000	7.500	9.000	10.500	12.000
21/4" * 6"	4.500	6.750	9.000	11.250	13.500	15.750	18.000
21/4" * 8"	6.000	9.000	12.000	15.000	18.000	21.000	24.000
21/4" * 10"	7.500	11.250	15.000	20.833	22.500	26.250	30.000
21/4" * 12"	9.000	13.500	18.000	22.500	27.000	31.500	36.000
21/2" * 4"	3.333	5.000	6.666	8.333	10.000	11.666	13.333
21/2" * 6"	5.000	7.500	10.000	12.500	15.000	17.500	20.000
21/2" * 8"	6.666	10.000	13.333	16.666	20.000	23.333	26.666
21/2" * 10"	8.333	12.500	16.666	20.833	25.000	29.166	33.333
21/2" * 12"	10.000	15.000	20.000	25.000	30.000	35.000	40.000

Anexo 2. Regla Scribner Decimal C.

Tabla de valores para la regla de estimación maderera Scribner decimal C en decenas de pies tabla.

Diám.* (pulg)	Longitud de la troza (pies)													
	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
6	0.5	0.5	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5
7	0.5	1	1	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	6
8	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	6	7	7
9	1	2	3	3	3	4	4	4	5	6	6	7	8	9
10	2	3	3	3	4	6	6	7	8	9	9	10	11	12
11	2	3	4	4	5	7	8	8	9	10	11	12	13	14
12	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
13	4	5	6	7	8	10	11	12	13	15	16	17	18	19
14	4	6	7	9	10	11	13	14	16	17	19	20	21	23
15	5	7	9	11	12	14	16	18	20	21	23	25	27	28
16	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
17	7	9	12	14	16	18	21	23	25	28	30	32	35	37
18	8	11	13	16	19	21	24	27	29	32	35	37	40	43
19	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
20	11	14	17	21	24	28	31	35	38	42	45	49	52	56
21	12	15	19	23	27	30	34	38	42	46	49	53	57	61
22	13	17	21	25	29	33	38	42	46	50	54	58	63	67
23	14	19	23	28	33	38	42	47	52	57	61	66	71	75
24	15	21	25	30	35	40	45	50	55	61	66	71	76	81
25	17	23	29	34	40	46	52	57	63	69	75	80	86	92
26	19	25	31	37	44	50	56	62	69	75	82	88	94	100
27	21	27	34	41	48	55	62	68	75	82	89	96	103	110
28	22	29	36	44	51	58	65	73	80	87	95	102	109	116
29	23	31	38	46	53	61	68	76	84	91	99	107	114	122
30	25	33	41	49	57	66	74	82	90	99	107	115	123	131
31	27	36	44	53	62	71	80	89	98	106	115	124	133	142
32	28	37	46	55	64	74	83	92	101	110	120	129	138	147
33	29	39	49	59	69	78	88	98	108	118	127	137	147	157
34	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160
35	33	44	55	66	77	88	98	109	120	131	142	153	164	175
36	35	46	58	69	81	92	104	115	127	138	150	161	173	185

Tabla de valores para la regla de estimación maderera Scribner decimal C en decenas de pies tabla.

Diám.* (pulg)	Longitud de la troza (pies)													
	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
37	39	51	64	77	90	103	116	129	142	154	167	180	193	206
38	40	54	67	80	93	107	120	133	147	160	174	187	200	214
39	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224
40	45	60	75	90	105	120	135	150	166	181	196	211	226	241

*** Diámetro de la sección menor de la troza sin corteza en pulgadas.**

Anexo 3. Regla Internacional.

Tabla de valores de la regla internacional de estimación maderera con un desperdicio por concepto de aserrín de 1/4". Los volúmenes consignados tienen una aproximación de 5 pies tabla.

Diámetro en pulgadas	Longitud de la troza en pies						
	8	10	12	14	16	18	20
Volumen en pies tabla							
4		5	5	5	5	5	10
5	5	5	10	10	10	15	15
6	10	10	15	15	20	25	25
7	10	15	20	25	30	25	40
8	15	20	25	35	40	45	50
9	20	30	35	45	50	60	70
10	30	35	45	55	65	75	85
11	35	45	55	70	80	95	105
12	45	55	70	85	95	110	125
13	55	70	85	100	115	135	150
14	65	80	100	115	135	155	175
15	75	95	115	135	160	180	205
16	85	110	130	155	180	205	235
17	95	125	150	180	205	235	265
18	110	140	170	200	230	265	300
19	125	155	190	225	160	300	335
20	135	175	210	250	290	330	370
21	155	195	235	280	320	265	410
22	170	215	260	305	355	405	455
23	185	235	285	335	390	445	495
24	205	255	310	370	425	485	545
25	220	280	340	400	460	525	590
26	240	305	270	435	500	570	640
27	260	330	400	470	540	615	690
28	280	355	430	510	585	665	745
29	305	385	465	545	630	715	800
30	325	410	495	585	675	765	860
31	350	440	530	625	720	820	915
32	375	470	570	670	770	875	980

Tabla de valores de la regla internacional de estimación maderera con un desperdicio por concepto de aserrín de 1/4". Los volúmenes consignados tienen una aproximación de 5 pies tabla.

Diámetro en pulgadas	L o n g i t u d d e l a t r o z a e n p i e s						
	8	10	12	14	16	18	20
	V o l u m e n e n p i e s t a b l a						
33	400	500	605	715	820	930	1045
34	425	535	645	760	875	990	1110
35	450	565	685	805	925	1050	1175
36	475	600	725	855	980	1115	1245
37	505	635	770	905	1040	1175	1315
38	535	670	810	955	1095	1245	1390
39	565	710	855	1005	1155	1310	1465
40	595	750	900	1060	1220	1380	1540
41	625	785	950	1115	1280	1450	1620
42	655	825	995	1170	1345	1525	1705
43	690	870	1045	1230	1410	1600	1785
44	725	910	1095	1290	1480	1675	1870
45	755	955	1150	1350	1550	1755	1960
46	795	995	1200	1410	1620	1835	2050
47	830	1040	1200	1410	1620	1835	2050
48	865	1090	1310	1540	1770	2000	2235
49	905	1135	1370	1605	1845	2085	2330
50	940	1185	1425	1675	1290	2175	2425
51	980	1235	1485	1745	2000	2265	2525
52	1020	1285	1545	1815	2080	2355	2625
53	1060	1335	1605	1885	2165	2445	2730
54	1100	1385	1670	1960	2245	2540	2835
55	1145	1440	1735	2035	2330	2640	2945
56	1190	1495	1800	2110	2420	2735	3050
57	1230	1550	1865	2185	2150	2835	3165
58	1275	1605	1930	2265	2600	2935	3275

* Diámetro de la sección menor de la troza sin corteza en pulgadas.

Anexo 4. Regla Doyle.

Tabla de valores de la regla Doyle de estimación maderera.

Diámetro en pulgadas	L o n g i t u d d e l a t r o z a e n p i e s							
	6	8	10	12	14	16	18	20
	V o l u m e n e n p i e s t a b l a							
8	6	8	10	12	14	16	18	20
9	9	13	16	19	22	25	28	31
10	14	18	23	27	32	36	41	45
11	18	25	31	37	43	49	55	61
12	24	32	40	48	56	64	72	80
13	30	41	51	61	71	81	91	101
14	38	50	63	75	88	100	113	125
15	45	61	76	91	106	121	136	151
16	54	72	90	108	126	144	162	180
17	63	85	106	127	148	169	190	211
18	74	98	123	147	172	196	221	245
19	84	113	141	169	197	225	253	281
20	96	128	160	192	224	256	288	320
21	108	145	181	217	253	289	325	361
22	122	162	203	243	284	324	365	405
23	135	181	226	271	316	361	406	451
24	150	200	250	300	350	400	450	500
25	165	221	276	331	386	441	496	551
26	182	242	303	363	424	484	545	605
27	198	265	331	397	463	529	595	661
28	216	288	360	432	504	576	648	720
29	234	313	391	469	547	625	703	781
30	254	338	423	507	592	676	761	845
31	273	365	456	547	638	729	820	911
32	294	392	490	588	686	784	882	980
33	315	421	526	631	736	841	946	1051
34	338	450	563	675	788	900	1013	1125
35	360	481	601	721	841	961	1081	1201
36	384	512	640	768	896	1024	1152	1280
37	408	545	681	817	953	1089	1225	1361
38	434	578	723	867	1012	1156	1301	1445

Tabla de valores de la regla Doyle de estimación maderera.

Diámetro en pulgadas	L o n g i t u d d e l a t r o z a e n p i e s							
	6	8	10	12	14	16	18	20
	V o l u m e n e n p i e s t a b l a							
39	459	613	766	919	1072	1225	1378	1531
40	486	648	810	972	1134	1296	1458	1620
41	513	685	856	1027	1198	1369	1540	1711
42	542	722	903	1083	1264	1444	1625	1805
43	570	761	951	1141	1331	1521	1711	1901
44	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
45	630	841	1051	1261	1471	1681	1891	2101
46	662	882	1103	1323	1544	1764	1985	2205
47	693	925	1156	1387	1618	1849	2080	2311
48	726	968	1210	1452	1694	1936	2178	2420
49	759	1013	1266	1519	1772	2025	2278	2531
50	794	1058	1323	1587	1852	2116	2381	2645
51	828	1105	1381	1657	1933	2209	2485	2761
52	864	1152	1440	1728	2016	2304	2592	2880
53	900	1201	1501	1801	2101	2401	2701	3001
54	938	1250	1563	1875	2188	2500	2813	3125
55	975	1301	1626	1951	2276	2601	2926	3251
56	1014	1352	1690	2028	2366	2704	3042	3380
57	1053	1405	1756	2107	2458	2809	3160	3511
58	1094	1458	1823	2187	2552	2916	3281	3645
59	1134	1513	1891	2269	2647	3025	3403	3781
60	1176	1568	1960	2352	2744	3136	3528	3920
61	1218	1625	2031	2437	2843	3249	3655	4061
62	1262	1682	2103	2523	2944	3364	3785	4205
63	1305	1741	2176	2611	3046	3481	3916	4351
64	1350	1800	2250	2700	3150	3600	4050	4500
65	1395	1861	2326	2791	3256	3721	4186	4651
66	1442	1922	2403	2883	3364	3844	4325	4805

* Diámetro de la sección menor de la troza sin corteza en pulgadas.

Anexo 5. Regla Doyle-Scribner.

Tabla de valores de la regla Doyle – Scribner de estimación maderera.

Diámetro en pulgadas	L o n g i t u d d e l a t r o z a e n p i e s						
	8	10	12	14	16	18	20
	V o l u m e n e n p i e s t a b l a						
6	2	3	3	4	4	5	5
7	5	6	7	8	9	10	11
8	8	10	12	14	16	18	20
9	12	16	19	22	25	28	31
10	18	23	27	32	36	41	46
11	24	31	37	43	49	55	61
12	32	40	48	56	64	72	80
13	40	50	61	71	81	91	101
14	50	62	75	88	100	112	125
15	60	75	91	106	121	136	151
16	72	90	108	126	144	162	180
17	84	106	127	148	169	190	211
18	98	122	147	171	196	220	245
19	112	141	169	197	225	253	280
20	128	160	192	224	256	288	320
21	144	181	217	253	289	325	361
22	162	202	243	283	324	364	404
23	180	226	271	316	361	406	452
24	200	250	300	350	400	450	500
25	220	276	331	386	441	496	551
26	242	302	363	423	488	544	605
27	264	330	397	463	530	596	661
28	288	360	432	504	516	648	720
29	305	381	457	533	609	685	761
30	328	411	493	575	657	739	821
31	355	444	532	622	710	799	888
32	368	460	552	644	736	828	920
33	392	490	588	686	784	882	980
34	400	500	600	700	800	900	1000
35	438	547	657	766	876	985	1095
36	462	577	692	807	923	1038	1152

Tabla de valores de la regla Doyle – Scribner de estimación maderera.

Diámetro en pulgadas	L o n g i t u d d e l a t r o z a e n p i e s						
	8	10	12	14	16	18	20
	V o l u m e n e n p i e s t a b l a						
37	514	644	772	901	1029	1158	1287
38	534	669	801	934	1068	1201	1335
39	560	700	840	980	1120	1260	1400
40	602	752	903	1053	1204	1354	1505
41	636	795	954	1113	1272	1431	1590
42	671	840	1007	1175	1343	1511	1679
43	698	872	1046	1222	1396	1571	1745
44	740	925	1110	1295	1480	1665	1850
45	759	949	1139	1329	1518	1707	1898
46	793	991	1190	1388	1587	1785	1983
47	828	1035	1242	1449	1656	1862	2070
48	864	1080	1296	1512	1728	1944	2160

* Diámetro de la sección menor de la troza sin corteza en pulgadas.

Anexo 6. Comparación de reglas de estimación maderera.

Tabla de comparación en los valores de las reglas madereras de estimación.

Diámetro en pulgadas	Troza de 8 pies de longitud				Troza de 16 pies de longitud			
	Interna cional	Doyle	Scribner	Doyle- Scribner	Interna cional	Doyle	Scribner	Doyle- Scribner
12	45	32	40	32	95	64	80	64
14	65	50	60	50	135	100	110	100
16	85	72	80	72	180	144	160	144
18	110	98	110	98	230	196	210	196
20	135	128	140	128	290	256	280	256
22	170	162	170	162	355	324	330	324
24	205	200	210	200	425	400	400	400
26	240	242	250	242	500	484	500	488
28	280	288	290	288	585	576	580	576
30	325	338	330	328	675	676	660	657
32	375	392	370	368	770	784	740	736
34	425	450	400	400	875	900	800	800
36	475	512	460	462	980	1024	920	923
38	535	578	540	534	1095	1156	1070	1068
40	595	648	600	602	1220	1296	1200	1204

* Diámetro de la sección menor de la troza sin corteza en pulgadas.

8. BIBLIOGRAFÍA

- Anuchin, N. P. 1970. Forest Mensuration. IPST. Jerusalem. Israel.
- Avery, T. E. 1967. Forest Measurements. McGraw-Hill Book Co., USA. 290 p.
- Basurco, F. 1973. Apuntes de Dasometría. Universidad Nacional IndeRena. Medellín. Colombia. 121 p.
- Belyea, M. C. 1931. Forest Measurement. Wiley & Sons. New York. USA. 319 p.
- Bruce, D. 1919. Alignment Charts in Forest Mensuration. Jour. For. 17: 773-801. USA.
- _____ 1920. The Height and Diameter Basis for Volume Tables. Jour. For. 18: 549-560. USA.
- _____ y Reineke, L. H. 1931. Correlation Alignment Charts in Forest Research. US Depto. Agric. Tech. Bull. 210. USA.
- _____ y Schumacher, F. X. 1965. Medición forestal. Ed. Herrero. Mexico.
- Caballero D., M. 1970. Empleo de coeficientes mórficos en la elaboración de tablas de volúmenes de cedro rojo. Bol. Div. Inst. Nal. Inv. Ftal. 26 B. México. 27 p.
- _____ 1971. Elaboración de tablas y volúmenes por medio del empleo de la variable combinada. Rev. Bosques VIII (1): 14-27. México.
- _____ 1972. Tablas y tarifas de volúmenes. Inventario Nacional Forestal. Nota INF. No. 7. Mexico. 55 p.
- _____ y Zerecero L., G. 1972. Estudio de una plantación comercial de coníferas. UIEF de San Rafael. Bol. No. 2. México. 110 p.
- _____ 1974. Consideraciones generales sobre el muestreo 3 P. Inventario Nacional Forestal. Nota INF. No. 25. México. 16 p.
- _____ 1974. ¿Piensa usted hacer un inventario forestal? Dirección General de Inv. Nal. Ftal. Nota INF. No. 27. México. 36 p.
- Carron, L. T. 1968. An Outline in Forest Mensuration with Special Reference to Australia. Australian National University Press. Camberra. Australia. 224 p.
- Chapman, H. H. 1924. Forest Mensuration. John Wiley and Sons Inc. 2a Ed. New York. USA. 557 p.
-

- _____ y Meyer, W. H. 1949. Forest Mensuration. McGraw-Hill Book Company. USA. 522 p.
- Chaturvedi, M. D. 1926. Measurements of the cubical Contents of Forest Crops. Oxford. England.
- Claughton-Waillin y McVicker, F. 1920. The Jonson Absolute Form Quotient as an Expresion of Tapper. Jour. For. 18: 346-357.USA.
- Dixon, W. J. y Massey, F. J. 1957. Introduction to Statistical Analysis. 2a Ed. McGraw-Hill Book Co. Inc. USA. 488 p.
- Evert, F.1969. Use of Farm Factor in Tree Volume Estimation. Jour. For 67 (2): 126-128. USA.
- FAO. 1974. Manual del inventario forestal con especial referencia a los bosques mixtos tropicales. Roma. Italia. 195 p.
- Grosenbaugh, L. R. 1963. Optical Dendrometers for Out-reach Diameter: A Conspectus and Same New Theory. For. Sci. Monograph No. 4. USA.
- _____ 1963. Some suggestions for Better Sample Tree-Measurement. Proc. Soc. Amer. For.: 36-42. Boston, Mass. USA.
- _____ 1965. 3 P. Sampling Theory and Program THRP for Computer Generation of Selection Criteria. U.S. Forester Research Paper PSW-21. Berkeley, Cal. USA. 53 p.
- _____ 1967. The Gains from Sample Tree Selection with Unequal Probabilities. Jour. For. 65(3): 203-206. USA.
- Honer, T. C. 1967. Standard Volume Tables and Merchan Table. (Conversion Factors for the Comercial Tree Species of Central and Eastern Canada for Management Research and Service Institute Information). Report FMX-X-5. Canadá.
- Hummel, F. C. 1955. The Volume-Basal Area Line. Forest Commision Bull. No. 24. London, England.
- Huntsberger, D. V. 1967. Elements of Statistical Inference. 2a Ed. Allin and Bacon. Boston, Mass., USA. 398 p.
- Hush, B. 1963. Forest Mensuration and Statistics. The Ronald Press Company. New York. USA. 474 p.
- _____ Miller, Ch. I. y Beers T. W. 1972. Forest Mensuration. 2a Ed. The Ronald Press Company. New York. USA. 410 p.

- INF, INIF y FAO. 1964. Informe técnico. Vol. I. Trabajos realizados. 130 p.
- Jonson, T. 1912. Forest Mensuration Investigations-Concerning Forest Tree, Form Determination of the Standing Tree. *Svenka Skogsvar dsf Tidskar*. 10: 235-275.
- Loetsch, F., Zohner, F. y Haller, K. E. 1973. Forest Inventory. BLV. Vol. 2. Munich, Alemania.
- Lojan, L. 1966. Apuntes del curso de dasometría. Turrialba. Costa Rica. C.A. 189 p.
- Martínez, M. J. 1937. Tablas de volúmenes para pino colorado, pino blanco y pino ayacahuite. Instituto de Enseñanza e Investigaciones Forestales y de Caza y Pesca. México. 70p.
- Mesavage, C. 1965. Aids for Using Barr and Stroud Dendrometers. *Soc. Amer. Foresters Proc.*. 1964: 238-249. USA.
- Mohn, C. A. y Ksinard, R. M. 1971. Volume Tables for Small Cottonwoods in Plantations. US . For. Serv. Research Note. 50-113. Southern Forest Exp. Sta. New Orleans. USA. 4 p.
- Musalem S., M. A. 1970. El uso de coeficientes mórficos en la elaboración de tablas de volúmenes de tres especies del grupo ponderosa. Tesis profesional. Esc. Nal. de Agric. Chapingo, Méx. México. 211 p.
- Myers, C. A. 1964. Volume Tables and Point-Sampling Factors for Lodgepole Pine in Colorado and Wyoming. US. Forest Serv. Res. Paper RM-6-Rocky Mountain Forest and Range Exp. Sta. Fort Collins, Colorado. USA. 16 p.
- Parde, J. 1961. Dendrometrie. Ed. de l'Ecole Nationale des Eaux et Forest. Nancy. France. 350 p.
- Ramírez M., H., Romahn de la V., C.F., Flores, R., L. J. y Caballero, D., M. 1977. Apuntes de Dendrometría. Depto. de Bosques. ENA/UACH. Chapingo, Méx. México. 227 p.
- Raymond, F. 1967. Tree-Lenght Volume Tables. Wood Measurement Conference.
- Snedecar, G. W. y Cochran, W. G., 1967. Statistical methods. Sixth Ed. The Iowa State Univ. Press. Iowa. USA. 594 p.
- Society of American Foresters. 1971. Terminology of Forest Science, Technology Practice and Products. Washington. D. C. USA. 349 p.
-

Anexo 6. Comparación de reglas de estimación maderera.

Space, J. 1971. Field Instructions. 3p Forest Inventory. State and Private Forestry. Southeastern Area. USA. 20 p.

_____ 1973. 3P. Cruise your Next Timber Sale. State and Private Forestry Southeastern Area. US. Forest Service. USA. 8 p.

Spurr, S. H. 1952. Forest Inventory. The Ronald Press Company. USA. 476 p.

Stell R., G. D. y Torrie, J. H. 1960. Principles and Procedures of Statistics. McGraw-Hill Book Co. Inc. New York. USA. 481p.

Turnbull, H. J. y Hoyer, G. E. 1965. Construction and Analysis of Comprehensive Tree-Volume Tariff Tables. Resource Management Report No. 8. Dept of Nat. Resources. State of Washington. USA. 64 p.

Villa Salas, A. B. 1973. Generalidades sobre la forma y el tamaño de los sitios de muestreo usados en inventarios forestales. INF. México. 10 p.